数学物理中的
微分几何与拓扑学

汪　容　著


ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书以理论物理文献中常用的语言深入浅出地介绍了微分几何与拓扑学(涉及代数拓扑与微分拓扑)近几十年来有深刻意义的重要发展。这些发展与理论物理的发展是密切相关的。全书分三个部分。第1部分介绍有关微分流形的基础知识,包括外微分形式、斯托克斯定理、弗罗贝尼乌斯定理、流形上张量的微分运算、黎曼流形和复流形等。第2部分讨论微分流形的整体拓扑性质,包括同伦性质、同调性质、德·拉姆上同调理论、陈省身发展的纤维丛理论和纤维丛示性类理论。第3部分对指标定理和四维流形的性质作了较深入的探讨,着重介绍了阿蒂亚-辛格指标定理如何具体应用于四种经典椭圆复形,如何应用于杨振宁-米耳斯场(Y-M场)而给出瞬子的模空间的维数。在此基础上,又介绍了唐纳森的一个深刻的定理及其证明的思路,并扼要叙述了弗里得曼和陶柏斯等利用唐纳森这个定理获得的重要结果:4维欧氏空间 R^4 中有不止一种,甚至不可数的无穷多种互相不微分同胚的微分结构。这与 $n\neq 4$ 的 R^n 只有唯一的微分结构有着重要的区别,从而引起理论物理界的重视。

本书可作为理论物理专业研究生教材,也可供科研人员参考。

序 言

汪容去世一年多了。为了纪念他，浙江大学出版社重印汪容在最后还能工作的几年里完成的这本著作。作为多年的老朋友，我很荣幸有机会为本书重印写序，以寄托哀思。

我和汪容相识在抗战时期内迁贵州的浙江大学。1943 年，我上浙大物理系，在永兴上课。汪容比我高一年级，在湄潭读书。虽然相隔约三十里，但两地的学生时常有交往，我与汪容也经常切磋一些物理问题。一年后，我离开浙大去昆明读书。这样，我与汪容便有一年的同学之谊。1972 年，我第一次回中国，提出想见的人中就有汪容，但由于种种原因未能如愿。再遇汪容，是第二年，1973 年，汪容率一个三人小组访美，了解国外高能物理发展的情况，为中国高能加速器的预制作调研。我在纽约接待他们，根据他们的来意，我专门开车一天，带他们参观访问。世道沧桑，故人相见，已是时隔近三十年。令人欣慰的是，虽然三十年未谋面，我们俩竟仍是同行。这点我早已知道，因为汪容在当年层子模型的研究中是有重要贡献的。后来，在量子规范场论的研究中，汪容也有很好的工作，他的《量子规范理论》一书是国内最早介绍规范场论的书之一。此是后话。

我与汪容这辈子一起做的最重要的一件事是建立浙江近代物理中心。1981 年，汪容回到母校当教授，他一直希望在浙江大学建立一个基础物理理论研究的机构。1990 年前后，汪容询问我有否此意向，我同意了。而后，时任浙江大学校长的路甬祥先生向我发了正式邀请。1991 年，浙江近代物理中心在浙江大学正式成立，我和汪容

分别任中心的主任和副主任。经过十几年,在汪容和中心全体成员的努力下以及国内外同行的支持下,浙江近代物理中心已成为国内理论物理学界的一支重要研究队伍。现在汪容已经逝世,希望中心的年轻人能把中心越办越好,以慰藉汪容在天之灵。

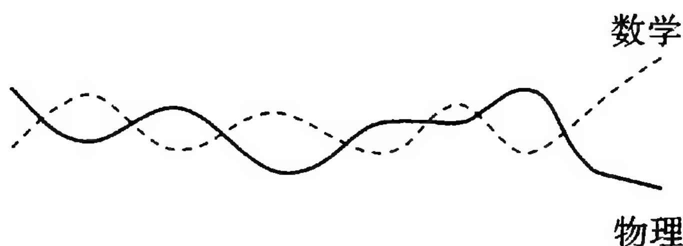
1998 年以后,我发现每年都参加中国高等科技中心顾问委员会会议的汪容不来了。后来,收到他夫人的信,说汪容的记忆力严重衰退,不能再来开会了。又听说这本《数学物理中的微分几何与拓扑学》是汪容与病魔抢时间,最终得以完成的。我深深地为汪容坚韧的意志力和高尚的敬业精神所感动。现代微分几何和拓扑学已在物理研究中起着很重要的作用,例如,高能物理中的规范反常和引力反常,凝聚态物理中的分数量子霍尔效应,分数电荷和分数统计现象,等等的研究,都与各种物理空间中的拓扑性质相关。此书虽是在病中完成,但汪容的书仍保持了他一贯的细致、清晰的风格,描述清楚,推导详尽。这本书深入浅出,渗透着一名优秀的物理学家对这些数学理论的深刻理解。我相信,对于学理论物理的学生,这是一本很好的入门书。同时,此书对从事相关研究的物理学工作者肯定也有很好的参考价值。

李政道

2008 年 9 月 4 日

前　　言

陈省身先生于1980年春季在北京大学讲授微分几何时，曾谈起数学研究与理论物理研究之间的相互启发和相互促进。在他1982年出版的《理论物理与力学论文集》中有一篇文章，题目是《微分几何与理论物理》，文中画了一个意味深长的图：



这个图很形象地表达了数学和物理的发展既是互相独立的，又是互相启发和互相促进的，陈省身先生的这篇论文使读者们体会到在数学和理论物理的交叉中，蕴含着一种十分深刻的内在联系和推动力。

在这20世纪不久就要结束的时候，还不能预言下一个交叉点将是什么。但人们已经注意到，微分几何与拓扑学在数学物理中所起的作用必定是十分重要的。尤其引人注目的有两件事：

(i) 2维流形的共形变换群具有无穷多个生成元，这与$n>2$维流形的共形变换群只有$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$个生成元截然不同；

(ii) 4维欧氏空间R^4有不可数的无穷种互相不微分同胚的微分结构。这又和$n\neq 4$的R^n只有唯一的一种微分结构大不一样！同微分几何和拓扑学的进展有关的数学与物理新的交叉点将是什么呢？人们正在拭目以待。

作者深深感谢侯伯元教授、沈纯理教授和干丹岩教授的内容丰富的讲课和有益的讨论。

汪　容

1997年春于杭州浙江大学

目　　录

第 1 部分　微分流形

第 2 部分 整体拓扑性质

第1部分　微分流形

第1章　预备知识

§1.1　什么是流形

流形的概念来源于欧氏空间。n维实流形就可看作是由一块块R^n(实n维欧氏空间)黏起来的结果。因此,n维实流形的最重要的特性就是在它的每一点的邻近,都有n维的局部坐标系。

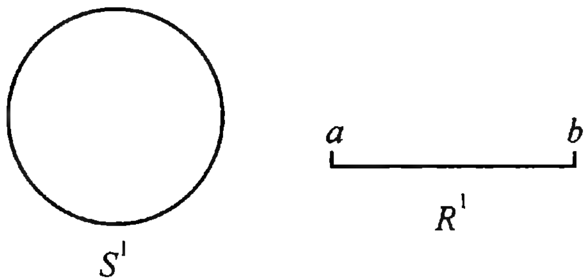


图1.1.1

图1.1.1中,S^1和R^1中的开区间$a<x<b$都是一维实流形。

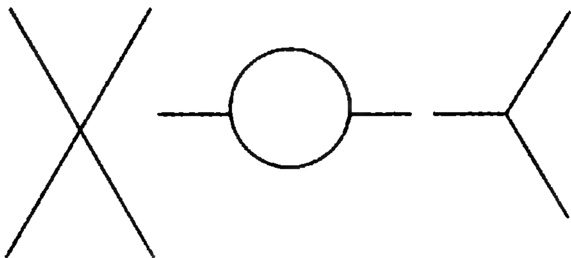
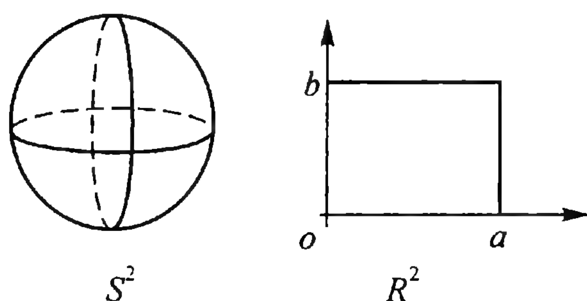


图1.1.2

图1.1.2中各个一维图形都不是一维实流形,因为交点处及其邻近都不与R^1同胚。



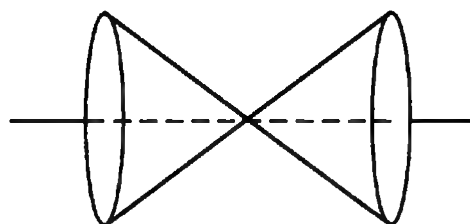


图 1.1.3　　　　图 1.1.4

图 1.1.3 中 S^2(球面)和 R^2 中的开区间 $0<x<a$,$0<y<b$ 都是二维实流形。

图 1.1.4 中的二维图形不是二维实流形,因为两锥交点及其邻近不与 R^2 同胚,同胚的意义见以下四个定义。

定义 1.1.1　设有两个空间 X 和 Y,$f(x)=y$ 是从空间 X 到空间 Y 的映射,而且**对于每一个** $y\in Y$ **都存在** $x\in X$(但存在的 x 可以不止一个),**满足** $f(x)=y$,则 $f:X\rightarrow Y$ 称为**满射**。

定义 1.1.2　设在 X 中任意取**两个不同的点** x_1,x_2,Y 中的 $y_1=f(x_1)$ 与 $y_2=f(x_2)$ **也都各不相同**,则 f **是一个一一对应的映射,简称一一映射**。

定义 1.1.3　如果 f **既是一一映射,又是满射,则称** f **为双射**。

定义 1.1.4　如果 X **与** Y **之间存在双射关系**,而且 f **和** f^{-1} 都是**连续函数**,则称 X **与** Y **之间存在**一个**同胚映射**。简称 X **与** Y **同胚**。

在**同胚映射下不变的性质称为拓扑性质**。如紧致性、分离性、连通性、开集维数……。拓扑性质又称拓扑不变性质。

根据"同胚"的定义,以及实流形是可分(由一块块 R^n 黏成)的,

可以写出实 n 维流形的定义如下。

定义 1.1.5　实 n 维流形 M 是一个 Hausdorff 空间，它的每一个点有一个含有该点的开集与 R^n 的开集同胚。

Hausdorff **空间和开集都是拓扑学的重要概念。**

定义 1.1.6　Hausdorff 空间是一个可分空间，其中任意两个分开的点各自具有互不相交的开邻域。

定义 1.1.7　开集 A 是给定空间(例如 Hausdorff 空间)中的点的子集合，开集 A 中的每一点的邻域都完全在 A 之中①。

§1.2　在流形中引入坐标与微分结构

令 f_U 代表定义 1.1.4 中的同胚映射，U 是流形 M 中的某个开集，则有

$$f_U: U \to f_U(U) \tag{1.2.1}$$

$f_U(U)$ 是 R^n 中的一个开集，(U, f_U) 称为流形 M 的一个**坐标卡**。

由于 f_U 是同胚映射，所以可以把 $f_U(z) \in R^n$ 在 R^n 上的坐标定义成为 M 上的 z 点的坐标：

$$u^i = (f_U(z))^i \qquad z \in U \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.2.2$_1$}$$

并且称 $u^i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $z (z \in U)$ 的局部坐标。

又设 V 是流形 M 中的另一个开集，则又有同胚映射 f_V，

$$f_V: V \to f_V(V) \tag{1.2.3}$$

---

① 开集 A 的定义与“邻域”的形状无关，与所选的距离函数也无关。

$f_V(V)$是 R^n 中另一个开集。(U, f_U)和(V, f_V)都是流形 M 的**坐标卡**。一般来说，不能整个流形 M 与 R^n 同胚，所以 M 需要用若干个开集$\{U_\alpha\}$来覆盖它，写成

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M \tag{1.2.4}$$

于是就有一系列的坐标卡$(U_1, f_{U_1}), (U_2, f_{U_2}), \cdots$，所有坐标卡的集合叫做**坐标卡集** $\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A} = \{(U_1, f_{U_1}), (U_2, f_{U_2}), \cdots\} \tag{1.2.5}$$

设 $U \cap V \neq \varnothing$，则 $f_U(U \cap V)$和 $f_V(U \cap V)$，必定是 R^n 中的两个非空开集，而且它们之间有如下关系：

$$\begin{aligned} f_V \cdot f_U^{-1} &: f_U(U \cap V) \to f_V(U \cap V) \\ f_U \cdot f_V^{-1} &: f_V(U \cap V) \to f_U(U \cap V) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

仿照(1.2.2)式，同样可以把 $f_V(z) \in R^n$ 上的坐标定义成为 M 上的 z 点的坐标

$$v^j = (f_V(z))^j \quad z \in V \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.2.2$_2$}$$

于是(1.2.6)式就是 M 上开集 $U \cap V$ 中的两种坐标 u^i 和 v^j 之间的坐标变换。$f_U \cdot f_V^{-1}$与 $f_V \cdot f_U^{-1}$互为逆变换。

(1.2.6)式中的 $f_U(U \cap V)$和 $f_V(U \cap V)$都是 R^n 上的点，所以其坐标都是实连续函数，从而坐标变换 $f_U \cdot f_V^{-1}$ 和 $f_V \cdot f_U^{-1}$ 的矩阵元也应该是实连续函数，如图 1.2.1 所示。

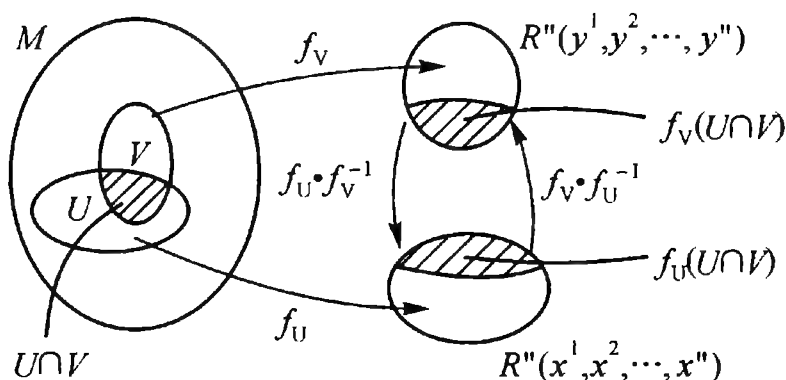


图 1.2.1

图 1.2.1 中的 x^i 和 y^i 之间的连续变换可写成

$$\begin{aligned} y^i &= (f_V \cdot f_U^{-1}(x^1,\cdots,x^n))^i = \varphi^i(x^1,\cdots,x^n) \\ x^i &= (f_U \cdot f_V^{-1}(y^1,\cdots,y^n))^i = \psi^i(y^1,\cdots,y^n) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中 φ^i 和 ψ^i 都是连续函数,并满足:

$$\begin{aligned} \varphi^i(\psi^1(y^1,\cdots,y^m)\cdots\psi^m(y^1,\cdots,y^m)) &= y^i \\ \psi^i(\varphi^1(x^1,\cdots,x^m)\cdots\varphi^m(x^1,\cdots,x^n)) &= x^i \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

如果 $U\cap V=\varnothing$,或者 $U\cap V\neq\varnothing$ 时,坐标变换(1.2.7)式中的坐标变换函数 $\varphi^i(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $\psi^i(y^1,\cdots,y^n)$ 都是 C^r 的,则称两个坐标卡 (U,f_U) 和 (V,f_V) 是 C^r-相容的。“C^r-”的含义是:微分一直到 r 次都是保持连续的。

定义 1.2.1　设 n 维流形 M 上给定的坐标卡集 $\mathscr{A}=\{(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2}),\cdots\}$ **满足下列三个条件,则** $\mathscr{A}$ **是** M **的一个** C^r **微分结构。**

(i) $(U_1,U_2,\cdots)$ 是 M 的一个开覆盖(开覆盖是指 $\bigcup U_i=M$)

(ii) $\mathscr{A}$ 中的任意两个坐标卡是 C^r-相容的。

(iii) $\mathscr{A}$ 是最大的坐标卡集,就是说,M 上任意一个坐标卡 $(\tilde{U},f_{\tilde{U}})$ 如果与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都 C^r-相容,则 $(\tilde{U},f_{\tilde{U}})$ 必也属于 $\mathscr{A}$。于是,$\mathscr{A}$ 就是 M 的一个 C^r 微分结构。

定义 1.2.2　M 上如果有一个 C^r 微分结构,则 M 就是一个 **C^r-微分流形**。

定义 1.2.3　若流形 M 上有一个 C^∞ 微分结构,则 M 就是一个**光滑流形**,或者称为**微分流形**(differential manifold)。

定义 1.2.4　若流形 X 和 Y 不但同胚(Homeomorphic),而且

它们之间的同胚映射是 C^∞ 可微的，则称 X 与 Y 为微分同胚(diffeomorphic)。两个微分同胚的流形必定同胚，但两个同胚的流形不一定微分同胚。

1956 年，Milnor 证明：存在若干种 7 维流形，它们都与 7 维球 S^7(拓扑)同胚，但微分结构都各不相同(不微分同胚)。

20 世纪 80 年代，Donaldson，Freedman，Kirby 和 Taubes 通过一系列的研究，发现 4 维欧氏空间 R^4 除通常的微分结构外，还有不可数的无穷多种不寻常的微分结构。换句话说，就是存在不可数的无穷多种 R^4，它们互相不微分同胚，但是互相拓扑同胚。

以下是微分流形的几个有代表性的例子。

例 1 n 维球面：

$$S^n = \{(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$$

用两个开集 U_+，U_- 就可以覆盖。

北多半球 $U_+ = S^n - (0,0,\cdots,-1)$，相应的映射 f_+ 是：

$$f_+ : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \frac{x^2}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right)$$

南多半球 $U_- = S^n - (0,0,\cdots,1)$，相应的映射 f_- 是：

$$f_- : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \frac{x^2}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right)$$

可证明它们是 C^∞ 相容的，所以 S^n 是光滑流形。目前，已知除上述微分结构外，对于 S^7, S^9, S^{11} 还有其他的微分结构，所以存在不止一种(拓扑)同胚而又不微分同胚的 S^7, S^9, S^{11}。

例 2 实 Grassmann 流形 $Gr(N,k)$ 是 N 维向量空间中通过原点的 k 维线性子空间的集合。k 维线性子空间的维数就是 k，k 维线性子空间在 N 维向量空间中各种取向的自由度为 $(N-k)$，所以 $Gr(N,k)$ 的总维数应该是 $k(N-k)$。

$Gr(N,k)$有 C^∞ 微分结构，从而是 $k(N-k)$维微分流形。

例3 实 n 维射影空间 $RP(n)$是 $Gr(N,k)$取 $N=n+1,k=1$ 的实 Grassmann 流形，所以它的维数是 $k(N-k)=n$。

$RP(n)$有 C^∞ 微分结构，是实 n 维微分流形。

例4 复 Grassmann 流形 $Gr(N,k,c)$是复 C^N 向量空间（C 代表复数）中通过原点的复 k 维线性子空间的集合。复 k 维线性子空间的维数是 k，复 k 维线性子空间在复 N 维向量空间中取向的自由度为$(N-k)$，所以 $Gr(N,k,c)$的维数是 $k(N-k)$（复数的维数）。

例5 复 n 维射影空间 $CP(n)$是 $Gr(N,k,c)$中取 $N=n+1,k=1$ 的复 Grassmann 流形。它的维数也是 $k(N-k)=n$。

$CP(n)$有 C^∞ 微分结构，是复 n 维微分流形。以下考察一下 $CP(1)$的性质：

$CP(1)$就是 $Gr(N=2,k=1,c)$，有两个复坐标，记作 $z=(z_1,z_2)$，z_1,z_2 不能同时为 0，可取两个开集覆盖：

(1) $U_{z_1\neq 0}$：取坐标， $\zeta=\dfrac{z_2}{z_1}$；

(2) $U_{z_2\neq 0}$：取坐标， $\zeta'=\dfrac{z_1}{z_2}$。

在交叠区（z_1,z_2 都$\neq 0$），可取

$$\zeta=\frac{z_2}{z_1}=u+\mathrm{i}v,\quad \zeta'=\zeta^{-1}=\frac{z_1}{z_2}=\frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2},\quad \zeta\zeta'=1$$

存在映射：

$$f:U_{z_1}\to U_{z_2},\quad f:\zeta\to\zeta'$$

从而可见：

$$f:(u,v)\to\left(\frac{u}{u^2+v^2},-\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

这是一个复解析映射，故 $CP(1)$是一个复解析流形。如果换变数：

$$u=\frac{x}{1+z},v=\frac{-y}{1+z}$$

(因 $x^2+y^2+z^2=1$,仍只有两个自变数)

则

$$\frac{u}{u^2+v^2}=\frac{x/(1+z)}{(1-z^2)/(1+z)^2}=\frac{x}{1-z}$$

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{y/(1+z)}{(1-z^2)/(1+z)^2}=\frac{y}{1-z}$$

可见映射(*)的 $f:U_{z_1}\to U_{z_2}$ 就是

$$f:\left(\frac{x}{1+z},\frac{-y}{1+z}\right)\to\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

对照例1的2维球面 S^2 的情况($n=2$),U_+ 到 U_- 的映射为

$$f':U_+\to U_-,$$

$$f':\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)\to\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

由此可见,$CP(1)$的两个开覆盖 U_{z_1},U_{z_2} 之间的映射关系与 S^2 的两个开覆盖之间的映射关系只相差一个镜象反射(前者是 $\frac{-y}{1+z}\to\frac{y}{1-z}$,后者是 $\frac{y}{1+z}\to\frac{y}{1-z}$),所以 $CP(1)$和 S^2 两个流形不但同胚,而且微分同胚(镜象反射不改变同胚和微分同胚关系)。

定义 1.2.5 若 n 维流形 M 的一组开集 $U_1,U_2,\cdots$(每一个 U_i 都具有有限的 n 维体积)的集合 $\mathscr{A}=\{U_i\}$ 满足

$$\bigcup_i U_i=M$$

则称 $\mathscr{A}=\{U_i\}$ 为流形 M 的开覆盖。

定义 1.2.6 若 $\mathscr{A}$ 是开覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个子集合,而且 $\mathscr{A}$ 本身仍是 M 的开覆盖,$\mathscr{A}$ 就称为开覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个子覆盖。

定义 1.2.7 若开覆盖 $\mathscr{A}=\{U_i\}$ 中的 U_i 个数有限,则这个覆盖

称为有限覆盖。

定义 1.2.8　若流形 M 的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖，则流形 M 是紧致的，反之是非紧致的。

根据以上定义可以推论 R^n 是非紧致的，因为不可能用任何有限子覆盖把 R^n 的无限的 n 维空间都覆盖起来。反之，S^n，$RP(n)$，$CP(n)$以及 $S^1\times S^1=T^2$（二维环面）都是紧致流形。

紧致性也是一种拓扑不变性，在同胚映射下是不变的。

定义 1.2.9　两个微分流形 M 和 N 的乘积流形 $M\times N$ 仍是微分流形。若$\{U_i,f_i\}$和$\{V_j,g_j\}$分别为 M 和 N 的坐标卡集，且存在光滑的投影

$$\Pi_1: M\times N\to M,\qquad \Pi_2: M\times N\to N$$

则 $M\times N$ 流形上的坐标卡集就是$\{U_i\times V_j; f_i\cdot\Pi_1\otimes g_j\cdot\Pi_2\}$。

由此可决定乘积流形的微分结构：

M 维数$+N$ 维数$=M\times N$ 维数

§1.3　切空间和余切空间

设 $y=f(x)$是 x 的函数，$x=x(t)$是 t 的函数，则 x 在 $x_P=x(t_P)$的邻近可建立如下的线性近似关系：

$$y=f(x_P)+(t-t_P)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=x_P}$$

$$=f(x_P)+(t-t_P)v_P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_P \qquad (1.3.1)_1$$

推广到 n 维流形 M，设 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$是 $x^1,\cdots,x^n$ 的函数。

$x^i=x^i(t)$是 t 的函数，则在 $x^i=x^i_P=x^i(t_P)$的邻近，可建立如下的线性近似关系：

$$
\begin{aligned}
y &= f(x_P^1,x_P^2,\cdots,x_P^n)+(t-t_P)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\
&= f(x_P^1,x_P^2,\cdots,x_P^n)+(t-t_P)v_P^i\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P
\end{aligned}
\tag{1.3.2$_1$}
$$

其中 $v_P^i=\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P$ 是 x^i 方向的“速度”。

(1.3.1)$_1$ 式和(1.3.2)$_1$ 式分别给出了 $f(x)$和 $f(x^1,\cdots,x^n)$在 P 点随 t 的变化，从而又可定义 X_P 如下$\left(\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P=v_P^i\right)$：

$$
X_Pf(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x)\Big|_P=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_P=v_P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_P
\tag{1.3.1$_2$}
$$

$$
\begin{aligned}
X_Pf(x^1,\cdots,x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\
&= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\
&= v_P^i\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P
\end{aligned}
\tag{1.3.2$_2$}
$$

(1.3.1)$_2$ 和(1.3.2)$_2$ 式中的 $f(x)$和 $f(x^1,\cdots,x^n)$是任意的函数，唯有(1.3.1)$_2$ 中的

$$
X_P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_P
\tag{1.3.1$_3$}
$$

及(1.3.2)$_2$ 中的

$$
X_P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_P^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P
\tag{1.3.2$_3$}
$$

与 $f(x)$和 $f(x^1,\cdots,x^n)$无关，与坐标系的选择也无关。所以，就把

$(1.3.1)_3$ 和 $(1.3.2)_3$ 中的 $X_P = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 定义为**切向量**[1]。举例来说，若是在 n 维流形 M 中有一条在 $t=0$ 时过 P 点的曲线

$$x^i = x^i(P) + \eta^i t + O(t^2)$$

则正好可得到在 $t=0$ 点切于此曲线的切向量

$$Y_P = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \eta^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P \tag{1.3.3}$$

与 $(1.3.2)_3$ 一致。

定义 1.3.1　过 P 点的所有切向量的集合形成流形 M 在 P 点的**切空间** $T_P(M)$。如果 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 有 n 个，则 $T_P(M)$ 就是 P 点的 n 维的切空间。

再把切向量 X_P 推广，即不限于只在 P 点有定义，而且在流形 M 上的每一点都有定义。于是 X_P 就扩充为 $X(x)$，$(1.3.2)_3$ 式就扩充为

$$X(x) = \sum_j \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.3.4}$$

$X(x)$ 是 x 的函数，代表各个 x 点上的切向量，所以在每一个点 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 都有定义。从而 $X(x)$ 具有场的性质，取名为**切向量场**。

若是有任意两个切向量场

$$X(x) = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y(x) = \sum_j \eta^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.3.5}$$

就可定义它们的李括号 $[X,Y]$ 如下：

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

---

① 本文涉及的向量均是指任意维流形上的向量，不同于一般欧氏空间的向量，按国际惯例，不用黑体表示。

$$=\left(\xi^j(x)\frac{\partial\eta^k(x)}{\partial x^j}-\eta^j(x)\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}f \tag{1.3.6}$$

后面在讨论李导数时，还会用到李括号。

接着再引入余切空间：余切空间的基是 $\mathrm{d}x^i(i=1,2,\cdots,n)$，切空间的基是$\frac{\partial}{\partial x^i}$，$n$ 是流形 M 的维数。

我们把 n 维流形 M 上 P 点的**切空间** $T_P(M)$ 的**对偶向量空间**定义为 M 上 P 点的**余切空间**，记作 $T_P^*(M)$。

为了说明切空间和余切空间的对偶关系，我们引入符号〈，〉，它的使用规则就是

$$\langle\mathrm{d}f,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle=\frac{\partial}{\partial x^i}f \tag{1.3.7}$$

由此可见

$$\langle\mathrm{d}x^j,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle=\frac{\partial x^j}{\partial x^i}=\delta_i^j \tag{1.3.8}$$

这就是切向量的基$\frac{\partial}{\partial x^i}$和余切向量的基 $\mathrm{d}x^j$ 的对偶关系。从而以$\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$为基的切向量空间 $T_P(M)$和以 $\mathrm{d}x^j(j=1,2,\cdots,n)$为基的余切向量空间 $T_P^*(M)$也是相互对偶的（P 代表 M 上的任何一点）。

定义 1.3.2 流形 M 上的所有各点 P 的切向量空间的并集

$$T(M)=\bigcup_P T_P(M) \tag{1.3.9}$$

称为流形 M 的**切丛**。

定义 1.3.3 流形 M 上所有各点的余切向量空间的并集

$$T^*(M)=\bigcup_P T_P^*(M) \tag{1.3.10}$$

称为流形 M 的**余切丛**。

$T(M)$和 $T^*(M)$都是 $2n$ 维流形，局域都是直积流形（即 n 维的坐标空间与 n 维的向量空间的直积）。

由于 $\mathrm{d}x^j$ 就是余切向量的基，所以 P 点的余切向量应写成

$$\sigma(P)=\sigma_j(P)\mathrm{d}x^j$$

把 P 点推广到 M 上每一个点 $x(x^1,\cdots,x^n)$，则形成**余切向量场**

$$\sigma(x)=\sigma_j(x)\mathrm{d}x^j \tag{1.3.11}$$

进一步再设 $\sigma_j(x)$是可微的，则(1.3.11)式的 $\sigma(x)$称为可微余切场。可微余切场 $\sigma(x)$又称为 1-形式（因为式中含有一个 $\mathrm{d}x^j$）。若取 $\sigma_j(x)=\delta_{ij}$，则 $\sigma(x)=\mathrm{d}x^i$，所以 $\mathrm{d}x^i$ 本身就是一个 1-形式。

§ 1.4　微分形式与外微分

定义 1.4.1　1-形式 $\mathrm{d}x^i$ 与 1-形式 $\mathrm{d}x^j$ 的 Cartan 外乘 $\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$ 是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j &=(\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j-\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i)\\ &=\delta^{ij}_{kq}\mathrm{d}x^k\otimes\mathrm{d}x^q \end{aligned}\tag{1.4.1}$$

$$(\delta^{ij}_{kq}=\delta^i_k\delta^j_q-\delta^i_q\delta^j_k)$$

$\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$ 是一个 2-形式（有两个 1-形式相乘），是一组有两个指标 i,j 的张量的基。

在流形 M 上可以建立张量场

$$K_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}f_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j \tag{1.4.2}$$

如果 $f_{ij}(x)$为可微的，$K_2(x)$就是可微的张量场，同时也是一个 2-形式。还可以扩充到更高的 p-形式：

$$\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}=\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}\mathrm{d}x^{k_1}\otimes\mathrm{d}x^{k_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{k_p} \qquad (1.4.3)_1$$

其中：

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{k_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_p}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_p}_{k_p}\end{vmatrix}\quad (i,k=1,\cdots,n)$$

$$=\begin{cases}1 & \text{当下指标为上指标的偶置换}\\ -1 & \text{当下指标为上指标的奇置换}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}\qquad (1.4.3)_2$$

从而可建立有 p 个指标的外微分张量的基和 p-形式的张量场：

$$K_p(x)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\qquad (1.4.4)$$

若有

$$\begin{aligned}&p\text{-形式}:\alpha_p(x)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\ &q\text{-形式}:\beta_q(x)=\frac{1}{q!}g_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\end{aligned}\qquad (1.4.5)$$

则可给出外积($(p+q)$-形式)：

$$\begin{aligned}\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)&=\frac{1}{p!\ q!}f_{i_1\cdots i_p}g_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\\ &\quad\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\\ &=\frac{(p+q)!}{p!\ q!}r_{p+q}(x)\end{aligned}\qquad (1.4.6)_1$$

其中

$$\begin{aligned}r_{p+q}(x)=&\frac{1}{(p+q)!}f_{i_1\cdots i_p}g_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\ &\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\end{aligned}\qquad (1.4.6)_2$$

注意 $(1.4.6)_2$ 式中的 $r_{p+q}(x)$ 和(1.4.5)式中的 $\alpha_p(x)$，$\beta_q(x)$ 有相同的外形，函数 $f_{i_1\cdots i_p}(x)$ 和 $g_{j_1\cdots j_q}(x)$ 相对其下指标完全反对称。如果 M 是 n 维的，则要求 $p+q\leqslant n$，否则 $\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)=0$，因为 $(1.4.6)_2$ 式中的指标 $i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q$ 必有重复。

外积满足结合律和分配律：

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) \tag{1.4.7}$$

$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma \tag{1.4.8}$$

p-形式 $\alpha_p(x)$ 和 q-形式 $\beta_q(x)$ 还有如下的交换律：

$$\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)=(-1)^{pq}\beta_q(x)\wedge\alpha_p(x) \tag{1.4.9}$$

这可以从(1.4.3)$_1$ 式和 $\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}$ 的性质(1.4.3)$_2$ 式得到。至此，我们已知：

(1) 切向量场 $X,Y,Z,\cdots$ 的李括号有如下性质：

① $[\lambda_1X+\lambda_2Y,Z]=\lambda_1[X,Z]+\lambda_2[Y,Z]$ (1.4.10)

② $[X,Y]=-[Y,X]$ (1.4.11)

③ $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (1.4.12)

这说明切向量场 $X,Y,Z,\cdots$ 的集合构成李代数。

(2) 余切向量$(\mathrm{d}x^1)$，$(\mathrm{d}x^2)$，$(\mathrm{d}x^3)$，$\cdots$，$(\mathrm{d}x^n)$也有一个重要性质，以下举例说明。

我们把 $\mathrm{d}x^i=(\mathrm{d}x^i)$看作矢量，在 n 维流形上有 n 个分量，例如取二维流形正交坐标：

$$\mathrm{d}x^1=\begin{cases}(\mathrm{d}x^1)^1=\mathrm{d}x^1\\(\mathrm{d}x^1)^2=0\end{cases}\qquad \mathrm{d}x^2=\begin{cases}(\mathrm{d}x^2)^1=0\\(\mathrm{d}x^2)^2=\mathrm{d}x^2\end{cases}$$

则有

$$\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2=\delta^{12}_{ij}(\mathrm{d}x^1)^i(\mathrm{d}x^2)^j=\mathrm{d}x^1\cdot\mathrm{d}x^2$$

取三维流形正交坐标：

$$\mathrm{d}x^1=\begin{cases}(\mathrm{d}x^1)^1=\mathrm{d}x^1\\(\mathrm{d}x^1)^2=(\mathrm{d}x^1)^3=0\end{cases}$$

$$\mathrm{d}x^2=\begin{cases}(\mathrm{d}x^2)^2=\mathrm{d}x^2\\(\mathrm{d}x^2)^3=(\mathrm{d}x^2)^1=0\end{cases}$$

$$\mathrm{d}x^3=\begin{cases}(\mathrm{d}x^3)^3=\mathrm{d}x^3\\(\mathrm{d}x^3)^1=(\mathrm{d}x^3)^2=0\end{cases}$$

则有

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \delta_{ijk}^{123}(dx^1)^i(dx^2)^j(dx^3)^k = dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3$$

依此类推到 n 维正交坐标系，可得

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = dx^1 \cdot dx^2 \cdots dx^n = \text{体积元} \tag{1.4.13}$$

如果坐标扭转一下，例如取 $dx^{1'} = dx^1 + 2dx^2$，则也有

$$dx^{1'} \wedge dx^{2'} \wedge \cdots \wedge dx^n = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \text{体积元}$$

所以无论坐标轴怎样非正交化，

$$dx^{1'} \wedge dx^{2'} \wedge \cdots \wedge dx^{n'} = \text{体积元} \tag{1.4.14}$$

总是成立的。

对于微分形式的微分运算包括：

d——外微分运算

D——协变微分运算（见第 3 章）

L_X——李导数运算（见第 2 章）

等。这里先给出外微分 d 的定义。

设有 p-形式：

$$\alpha_p = \frac{1}{p!} \quad f_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{1.4.15}$$

它的外微分是：

$$\begin{aligned} d\alpha_p &= \frac{1}{p!} df_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} f_{i_1 \cdots i_p, j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{1}{(p+1)!} \delta_{k_1 \cdots k_{p+1}}^{j, i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p, j} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{p+1}} \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

取分母中的$(p+1)!$ 是因为 $k_1 \cdots k_{p+1}$ 的排列有$(p+1)!$ 种，其贡献都相同。

再进一步作外微分：

$$d(df) = d(f_{,i} dx^i) = f_{,ij} dx^j \wedge dx^i = 0$$

（因 $f_{,ij}=f_{,ji}$）

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha_p)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p,jk}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}=0 \qquad (1.4.17)$$

（因 $f_{i_1\cdots i_p,jk}$ 中 jk 对称，$\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^j$ 反对称）

§1.5 流形的定向和微分形式的积分

在可微流形 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}$中，任意一个开集 $\bar{U}_\alpha$ 都可以有多种坐标系。其中任取两种坐标系(x^i)和(y^j)，则可能有两种情况：

（1）雅可比行列式$\dfrac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$，则称坐标系$(x^i)$和$(y^j)$的定向(orientation)相同。

（2）雅可比行列式$\dfrac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}<0$，则称坐标系$(x^i)$和$(y^j)$定向相反。

微分流形 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}$之中任意两个有交的开集 U_α 和 U_β 的坐标系(x^α)和(x^β)，在 $U_\alpha\cap U_\beta(\neq\varnothing)$区域中的$\dfrac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$是不为零的，于是也可能有两种情况：

（1）$\{U_\alpha\}$之中任何一对 U_α 和 U_β 在 $U_\alpha\cap U_\beta(\neq\varnothing)$的坐标系$(x^\alpha)$和$(y^\beta)$的雅可比行列式$\dfrac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$。在这种情况下，微分流形就是定向流形。

（2）$\{U_\alpha\}$之中并不是每一对 U_α 和 $U_\beta(U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing)$的坐标系$(x^\alpha)$和$(y^\beta)$的雅可比行列式$\dfrac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$都$>0$。在这种情况下，微分流形就是非定向的。

以二维曲面为例，在环面 T^2（见图 1.5.1）上，坐标架环绕一周

后可以回到出发时坐标架的位置，所以取每一对 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 都有 $\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$。这说明 T^2 是一个定向的二维流形，但在 Mobius

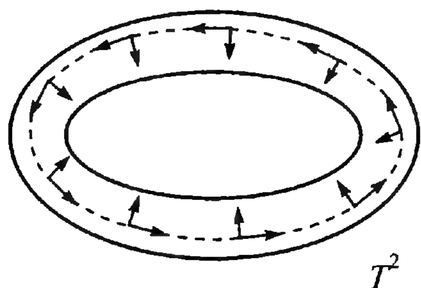


图 1.5.1

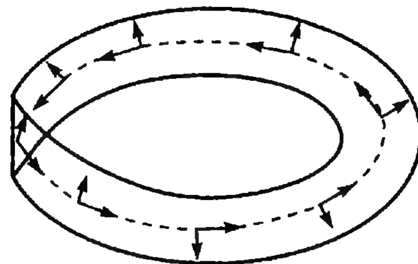


图 1.5.2　Möbius 带

带上，坐标架环绕一周后有一个坐标轴反向（见图 1.5.2），于是原先的坐标与环绕一周后的坐标的雅可比行列式是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

说明了 Möbius 带是一个非定向的二维流形。T^2 与 Möbius 带的差别还表现为 T^2 有内外两个侧面，Möbius 带则只有一个单侧面。这个单侧面是把内外两个侧面黏接起来的结果。正是由于内外两个侧面的黏接，使得坐标架移动了一周后，向上的箭头倒转（$y'=-y$），纵向箭头方向不变（$x'=x$）。

定理 1.5.1　n 维流形 M 上如果存在一个处处非零的连续的 n-形式 w，则流形 M 是可定向的，其逆定理亦真。

证明　设 w 处处非零，则 w 必定处处大于 0（或处处小于 0），从而要求在 $U \cap V$ 区域中 $w^V_{1,\cdots,n}$ 与 $w^U_{1,\cdots,n}$ 同号，即要求 $\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$ 处处大于 0，所以 M 是定向的。

其逆：如果流形 M 是可定向的，则在每一个 $U\cap V$ 区域中 $\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$，从而 $w^U_{1\cdots n}$ 与 $w^V_{1\cdots n}$ 同号，必定存在一个处处非零的（>0 或 <0）连续的 n-形式 w。

当流形仅有一个坐标卡（可被一个开集覆盖），此流形是自动地可定向的。

关于 n 维流形 M 上的 n 重积分，我们注意到 $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ 的坐标变换正好是

$$\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n=\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

和 n 重积分的被积式中体积元的变换一致。所以，在进行 M 流形上的 n 重积分时，可选 n-形式的 $\tau(x)$：

$$\tau(x)=\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \tag{1.5.1}$$

为 n 维体积元。所以，一个 n 维可微流形 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 确定以后，就可以在 M 上进行 $f(x)$ 的积分运算。积分可写成

$$\int_M f(x)\tau(x)=\int_M f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \tag{1.5.2}$$

若 $x^1,\cdots,x^n$ 取 R^n 中的正交坐标，则简化成

$$\int_M f(x)\tau(x)=\int_M f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n \tag{1.5.3}$$

M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中有不止一个坐标卡 $U_\alpha,U_\beta,\cdots$ 时，须分块积分再求和。

设 M 是一个定向光滑有边界的 n 维流形，w_{n-1} 是 M 中的一个 $(n-1)$-形式，它的支集是紧致的（f 的支集记作 Supp f，是指包围 $f\neq0$ 区域的最小的闭集合，支集之外 $f\equiv0$。但支集只是外围，它本身并不等于 $\{x,f(x)=0\}$ 的集合），∂M 是 M 的非零的边界，则有如下定理。

Stokes 定理

$$\int_{\partial M} w_{n-1} = \int_{M} \mathrm{d}w_{n-1} \tag{1.5.4}$$

证明 不失一般性，我们把 w_{n-1} 取在开集

$$U \subset R_{+}^{n} = (x = (x^1, \cdots, x^n) \in R^n, x^n \geqslant 0) \tag{1.5.5}$$

之中，并且设 w_{n-1} 的支集是紧致的（即 $w_{n-1} \neq 0$ 的区域不延伸到无穷远处）。w_{n-1} 的具体形式一般可取为

$$w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{x}^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{1.5.6}$$

式中 $\mathrm{d}\hat{x}^i$ 表示把 $\mathrm{d}x^i$ 抹掉，则又有

$$\mathrm{d}w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{1.5.7}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{U} \mathrm{d}w_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{R_{+}^{n}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{R_{+}^{n}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

这里选用了 R_{+}^{n} 的直角坐标，所以可把外乘符号 $\wedge$ 略去。

再把 R_{+}^{n} 分解成 R_{+} 和 R^{n-1}，(1.5.8)式右端就有两部分：

$$\begin{aligned} \int_{U} \mathrm{d}w_{n-1} = &\sum_{i=1}^{n-1} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x^n \left(\int_{R^{n-1}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^i \cdots \mathrm{d}x^{n-1} \\ &+ \int_{R^{n-1}} \left(\int_{0}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} \mathrm{d}x^n \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

由于每一个 α_i 的支集都是紧致的，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i = \alpha_i (x^1 \cdots x^i \cdots x^n) \Big|_{x^i = -\infty}^{x^i = +\infty} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

所以(1.5.9)式右端剩下了后一部分只含 α_n 的项

$$\int_U \mathrm{d}w_{n-1} = -\int_{R^{n-1}} \alpha_n(x^1, x^2, \cdots, x^{n-1}, 0)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} \tag{1.5.10}$$

另一方面,

$$\int_{\partial U} w_{n-1} = \int_{\partial R_+^n} w_{n-1}$$

$$= \int_{\partial R_+^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i(x^1, \cdots, x^n)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots$$

$$\wedge \mathrm{d}x^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

在 ∂R_+^n 中,$x^n = 0, \mathrm{d}x^n = 0$,所以 $\sum_{i=1}^{n}$ 中只留下不含 $\mathrm{d}x^n$ 的一个项:

$$\int_{\partial U} w_{n-1} = \int_{\partial R_+^n} (-1)^{n=1} \alpha_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots$$

$$\wedge \mathrm{d}x^{n-1} \tag{1.5.11}$$

注意 虽然流形∂R_+^n和 R^{n-1}在外形上相像,但是两者的坐标和定向是不相同的。R_+^n 的外向法线的方向是$-e_n = (0, \cdots, 0, -1)$,故 R_+^n 的定向的基的排列应该是$(-e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$,其中法线方向的基$(-e_n)$列在第一。

与此对照,R^n 的定向的基的排列是$(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n)$。于是,在 R^n 中的坐标若取作$(x^1, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n)$,则相应地在 R_+^n 中的坐标应取作$(y^1 = -x^n, y^2 = x^1, \cdots, y^n = x^{n-1})$。

坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \cdots, y^n)} = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n \tag{1.5.12}$$

与$(-\mathrm{d}x^n) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} = (-1)^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} \wedge \mathrm{d}x^n$ 一致。

所以,如果把(1.5.11)式中的 $\int_{\partial R_+^n}$ 换成$\int_{R^{n-1}}$,则由于坐标变换,得

$$\int_{\partial U} w_{n-1} = \int_{R^{n-1}} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot \alpha_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}$$

$$= -\int_{R^{n-1}} \alpha_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} \tag{1.5.13}$$

与(1.5.10)式右方一致,得

$$\int_U \mathrm{d}w_{n-1} = \int_{\partial U} w_{n-1} \tag{1.5.14}$$

Stokes 定理得证。

例 设 D 为 R^3 中的有界闭区域,∂D 是 D 的 2 维边界。

取矢量 E 和面积元 $\mathrm{d}S$,则有

$$\begin{aligned}
\int_D \mathrm{d}(E \cdot \mathrm{d}S) &= \int_D \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} E_i \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) \\
&= \int_D \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_i}{\partial x^q} \mathrm{d}x^q \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \\
&= \int_D \frac{\partial E_1}{\partial x^1} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \int_D \frac{\partial E_2}{\partial x^2} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
&\quad + \int_D \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
&= \int_D \frac{\partial E_1}{\partial x^1} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - \int_D \frac{\partial E_2}{\partial x^2} \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
&\quad + \int_D \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&= \int_{(\partial D)_1} E_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \int_{(\partial D)_2} E_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&\quad + \int_{(\partial D)_3} E_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&= \int_{\partial D} E \cdot \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

所以从$\int_D$到$\int_{\partial D}$这一步，必须把与 dS 垂直的 dx^i 移到最左边。也就是说，必须把与 dσ_i（即 d$x^1 \wedge$ dx^2，d$x^2 \wedge$ dx^3，d$x^3 \wedge$ dx^1）正交的法线方向的 dx^i 移到最左边去。这正是证明 Stokes 定理时，R_+^n 中的坐标应取作 $y^1 = -x^n, y^2 = x^1, \cdots, y^n = x^{n-1}$ 的原因，见(1.5.12)式。

第 2 章　切向量和余切向量的一些性质和运算

§2.1　切向量场和余切向量场的映射变换

设有两个微分流形 M 和 N,它们之间存在光滑映射 f 和反映射 f^{-1}:

$$f: M \to N \qquad f^{-1}: N \to M$$
$$p \to q = f(p) \qquad q \to p = f^{-1}(q) \tag{2.1.1}$$

(1) 当 f 作用于 M 中的切向量场时(称为切映射),

$$X = \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \tag{2.1.2}$$

$$f: X \to Y = \eta^i(x)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{q=f(p)} \tag{2.1.3$_1$}$$

所以对于切向量场,映射 f 表现为 $x \to y = f(x)$,f 又称为"推前映射($x \to y$)"。

(2) 当 f^{-1}作用于 N 中的余切向量场时(称为余切映射),

$$w_1(y) = \varphi_i(y)\mathrm{d}y^i \tag{2.1.4}$$

$$f^{-1}: w_1(y) \to w_1(x) = \varphi_i(y)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\bigg|_{p=f^{-1}(q)} \tag{2.1.5$_1$}$$

所以,对于余切向量场,映射 f^{-1}表现为 $y \to x = f^{-1}(y)$,f^{-1}又称为"拖回映射($x \leftarrow y$)"。

把拖回映射推广到 r 阶余切张量,则有

$$w_r(y)=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}(y)\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_r} \tag{2.1.6}$$

（$\varphi_{i_1\cdots i_r}$ 对于 $i_1\cdots i_r$ 全反对称）

$$f^{-1}:w_r(y)\to w_r(x)$$
$$=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots,i_r}(y(x))\frac{\partial(y^{i_1},\cdots,y^{i_r})}{\partial(x^{k_1},\cdots,x^{k_r})}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_r} \tag*{(2.1.7)$_1$}$$

(2.1.1)式的 f 和 f^{-1} 是流形 $M\xrightarrow{f}N$ 和流形 $N\xrightarrow{f^{-1}}M$ 的映射。而 $(2.1.3)_1$ 式的 f 是 $f:M\to N$ 映射诱导的切映射；$(2.1.5)_1$ 式的 f^{-1} 是 $f^{-1}:N\to M$ 映射诱导的余切映射。为了避免混淆，我们把诱导映射写成 f_* 和 f^*，从而 $(2.1.3)_1$ 式可改写成：

$$f_*:X\to Y=\eta^i(x)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{q=f(p)} \tag*{(2.1.3)$_2$}$$

f_* 就是“推前映射”。再把 $(2.1.5)_1$ 式改写成

$$f^*:w_1(y)\to w_1(x)=\varphi_i(y(x))\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\bigg|_{p=f^{-1}(q)} \tag*{(2.1.5)$_2$}$$

f^* 就是“拖回映射”。

$(2.1.7)_1$ 式也可改写成

$$f^*:w_r(y)\to w_r(x)=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial(y^{i_1}\cdots y^{i_r})}{\partial(x^{k_1}\cdots x^{k_r})}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_r} \tag*{(2.1.7)$_2$}$$

接连两次“推前映射”：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\xrightarrow{f_{1*}}\frac{\partial}{\partial y}\xrightarrow{f_{2*}}\frac{\partial}{\partial z}\right):\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial z^k}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial z^k}$$

$$(f_2\cdot f_1)_*=f_{2*}\cdot f_{1*},\quad\left(\frac{\partial}{\partial x}\xrightarrow{(f_2\cdot f_1)_*}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{①} \tag{2.1.8}$$

① $(f_2\cdot f_1)_*=f_{2*}\cdot f_{1*}$ 与 $(f_2\cdot f_1)=f_2\cdot f_1$ 类似；
$(f_2\cdot f_1)^*=f_1^*\cdot f_2^*$ 与 $(f_2\cdot f_1)^{-1}=f_1^{-1}\cdot f_2^{-1}$ 类似。

接连两次"拖回映射"：

$$(\mathrm{d}x \xleftarrow{f_1^*} \mathrm{d}y \xleftarrow{f_2^*} \mathrm{d}z): \frac{\partial z^k}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}z^k$$

$$(f_2 \cdot f_1)^* = f_1^* \cdot f_2^*, (\mathrm{d}x \xrightarrow{(f_2 \cdot f_1)^*} \mathrm{d}z) \tag{2.1.9}$$

(2.1.8)式的$(f_2 \cdot f_1)_*$和(2.1.9)式的$(f_2 \cdot f_1)^*$是对偶的线性映射。

f_*与f^*也是相互对偶的线性映射，它们有如下性质：

$$\langle f^* w_1, X\rangle_p = \langle w_1, f_* X\rangle_{q=f(p)} \tag{2.1.10}$$

证明 设$w_1 = w_1(y) = \varphi_j(y)\mathrm{d}y^j, X = X(x) = \varepsilon^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$，

则有

$$f_* X = \varepsilon^i(x)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

(根据$(2.1.3)_1$式)

$$f^* w_1 = f^* w_1(y) = \varphi_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

(根据$(2.1.5)_1$式)

所以

$$\langle f^* w_1, X\rangle_p = \langle \varphi_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i, \varepsilon^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\rangle_p$$

$$= \varphi_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\delta^i_k\varepsilon^k(x) = \varphi_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\varepsilon^i(x)$$

$$\langle w_1, f_* X\rangle = \langle \varphi_j(y)\mathrm{d}y^j, \varepsilon^i(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}\rangle_{q=f(p)}$$

$$= \varphi_j(y)\delta^j_k\varepsilon^i(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \varphi_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\varepsilon^i(x)$$

证毕。

注意 (2.1.10)式左端是M流形上的函数：X是M流形上的切向量，$f^* w_1$是从N流形拖回到M流形上的1-形式。

(2.1.10)式右端是N流形上的函数：w_1是N流形上的1-形

式，$f_* X$ 是从 M 流形推前到 N 流形上的切向量。

(2.1.10)式的等号是说左右两端在对应点（p 点与 $q=f(p)$ 点）上取值相同。

§2.2　子流形及层状结构

n 维流形 M 中的一个 m 维子流形 $S^{(m)}$（$m<n$）是 M 中的一个光滑子集。在 $S^{(m)}$ 上，任何一点的开邻域都有一个（$x^1, x^2, \cdots, x^m$）坐标系；其余（$n-m$）个坐标（M 中的坐标）是常数（$a^1, a^2, \cdots, a^{n-m}$），所以在 n 维流形 M 的坐标系中，子流形 $S^{(m)}$ 上每一点的坐标是（$x^1, \cdots, x^m; a^1, \cdots, a^{n-m}$）。

现在从切向量场出发来考察子流形，先从 1 维子流形开始。

M 上的 1 维子流形是曲线，曲线的每一点都有一个切向量。反之，如果在 M 上给定了一个切向量场 $X(x)=\xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，那么，从流形上任意点出发，是否能找到一条曲线，使其上面的切线恰为曲线所经点上的向量场呢？答案有两种情况。第一种情况：如果在点 $P\in M$，$X_P=0$，则 P 点称为切向量场上的一个临界点。邻近临界点的切向量场的性质很复杂，与整体拓扑性质有关，这里暂不讨论。第二种情况：在非临界点（简称普点 generic point）附近，可以看到必能找到一条（且仅有一条，取 X_P 方向）通过 P 点的光滑曲线，且曲线上的切线恰好与曲线所经过的 P 点上的向量场 X_P 的方向一致（这个方向与(1.3.2)式中的 v_P^i 相同）。这样的曲线称为向量场 X 的积分曲线。由于每一点的向量场只有一个方向，所以通过每一点的积分曲线只能有一条，不同的积分曲线不相交。这样得到的每一条积分曲线都是 M 上的一个 1 维子流形 $S^{(1)}$。

推广到 2 维子流形 $S^{(2)}$（见图 2.2.1，M 为 3 维流形），在每一个

$S^{(2)}$上，x^1，x^2 是变数，$a^1(=x^3)$是常数，取不同的常数 a^1，就给出不同的 $S^{(2)}$子流形。许多 $S^{(2)}$子流形叠起来，就形成层状结构(参看图 2.2.1)。

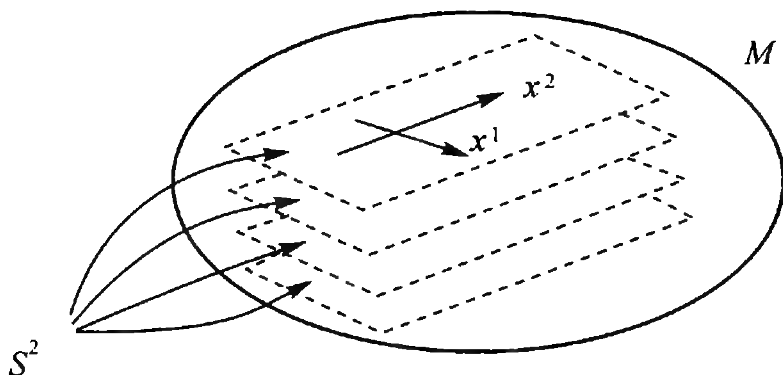


图 2.2.1

现在我们再考察三维空间中的角动量算子

$$
\begin{aligned}
L_x &= -z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z} \\
L_y &= -x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x} \\
L_z &= -y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

它们满足如下对易关系：

$$
\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}=-L_z \\
[L_y, L_z] &= z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}=-L_x \\
[L_z, L_x] &= x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}=-L_y
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

三个角动量算子 L_x，L_y，L_z 实际上是三维空间中的三个切向量场 X_1，X_2，X_3：

$$X_1=L_x,\quad X_2=L_y,\quad X_3=L_z \tag{2.2.3}$$

若用 $\Sigma^3=\{X_1, X_2, X_3\}$来代表切向量场的集合，那么，(2.2.2)式就表明了李括号$[X_i, X_j]$无一例外地都是 Σ^3 中的三个切向量场

的线性叠加。

我们还注意到，L_x，L_y，L_z 并不是线性无关的，因为

$$xL_x + yL_y + zL_z = 0 \tag{2.2.4}$$

所以在每个(x,y,z)点，独立的 X_i 只有两个，不是三个。这表明由 $\Sigma^3=\{X_1,X_2,X_3\}$得到的积分子流形应该都是两维的曲面。取

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \tag{2.2.5}$$

可以发现

$$L_x r=0,\quad L_y r=0,\quad L_z r=0 \tag{2.2.6}$$

所以沿着任何一条切向量场的方向前进，$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$总是不增不减。从而得知，在 3 维流形 M 中，由切向量织成的子流形不仅是两维的曲面，而且必定是 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=$常数的球面，它的维数是 2，与独立的 X_i 的个数为 2 是一致的。

同时，由于 r 是一个待给的常数，它可以取一系列的数值，所以由上述切向量场的积分曲线交织成的子流形族必定是一个同心球面族。

有一个同上述子流形及层状结构有关的定理叫 Frobenius 定理。定理的内容是：如果在流形 M 中定义了 m 个光滑的切向量场的集合

$$\Sigma^m=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\} \tag{2.2.7}$$

而且这些向量场的任何一组李括号$[X_i,X_j]$都可以写成 $X_1,\cdots,X_m$ 的线性组合，那末，这些向量场的积分曲线就能够交织成一族子流形，每一个子流形的维数或等于 m，或小于 m（如果 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 不是全都线性无关）。

前面的 $\Sigma^3=\{X_1,X_2,X_3\}$的例子是 $m=3$。但子流形是同心球，是 2 维的，小于 3，因为 X_1,X_2,X_3 不是全都线性无关的。

Frobenius 定理有两种形式，上面说的一种形式是借助于向量场进行论证的。另外还有一种形式则是借助于余向量场（1-形式）

进行论证的。可以证明两种形式等价，但由于同后面要讲的内容关系不大，所以就不讨论了。

§2.3 李导数 L_X

设在流形 M 上存在可微分向量场，则可在 M 上任意一个 P 点邻近选取坐标系(x)，并引入切向量场

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i};$$

又设 $K(x)$是一个张量场（包括标量场、矢量场等），则可以把李导数 L_X 对 $K(x)$的作用定义为（P 代表 x 点）：

$$L_X K|_P=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(K(x+\xi(x)t)-K(x)) \tag{2.3.1}$$

其中 x 和 $\xi(x)$都是矢量，t 则是一个参变量。再令

$$\frac{dx^i}{dt}=\xi^i(x)\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.2}$$

就可积分解出积分曲线：

$$x^i=x^i(x_P,t)\qquad (x^i_P=x^i(x_P,t=0)) \tag{2.3.3}$$

(1) 设 K 是标量场 $f(x)$：

$$\begin{aligned}L_X f(x)|_P&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+\xi t)-f(x))=\lim_{t\to 0}\frac{\xi^i t}{t}\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{t\to 0}\\&=\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{t=0}=Xf|_P\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

(2) 设 K 是向量场$Y(x)=\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$

$$(x^{i\prime}=x^i+\xi^i t,x^i=x^{i\prime}-\xi^i t):$$

$$L_X Y(x)|_P=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\eta^i(x+\xi t)\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i})|_P$$

$$\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}=\delta^j_i-\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i},t\approx\delta^j_i-\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}t,\text{略去 } t^2 \text{ 项}\right)|_P$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\eta^i(x+\xi t)(\delta^j_i-\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}t)\frac{\partial}{\partial x^j}-\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i})|_P$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\eta^i(x)+\frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}\xi^k(x)t)(\delta^j_i-\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}t)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$-\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i})|_P$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\eta^j(x)-\eta^i(x)\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}t+\frac{\partial\eta^j}{\partial x^k}\xi^k(x)t)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$-\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i})|_P$$

$$=\xi^k(x)\frac{\partial\eta^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}-\eta^i(x)\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}=[X,Y]|_P \tag{2.3.5}$$

(3) 设 K 是 1-形式 $w(x)=w_i(x)\mathrm{d}x^i$：

$$\mathrm{L}_X w_i(x)\mathrm{d}x^i=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\left(w_i(x)+\frac{\partial w_i(x)}{\partial x^k}\xi^k t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^j}\mathrm{d}x^j-w_i(x)\mathrm{d}x^i\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\left(w_i(x)+\frac{\partial w_i(x)}{\partial x^k}\xi^k t\right)\cdot\left(\delta^i_j+\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}t\right)\mathrm{d}x^j-w_i(x)\mathrm{d}x^i\right)$$

$$=\left(w_i(x)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j+\frac{\partial w_j(x)}{\partial x^k}\xi^k\mathrm{d}x^j\right)$$

$$=\left(w_i(x)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\frac{\partial w_j(x)}{\partial x^k}\xi^k\right)\mathrm{d}x^j \tag{2.3.6}$$

(4) 设 K 是一个任意的张量场 $T^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_q}$，用类似的方法可以证明，对于每一个下指标，$\mathrm{L}_X$ 的作用可按(2.3.6)式的 1-形式处理；对于每一个上指标，L_X 的作用可按(2.3.5)式的矢量场的方式处理；对于不含指标的部分可按(2.3.4)式的标量场的方式处理。此外，还有三个有趣的性质：

①L_X 作用在标量场仍得标量场，L_X 作用在向量场仍得向量场，L_X 作用在1-形式仍得1-形式，所以 L_X 是不改变张量场类型的线性算子。

② L_X 是可以作用在张量场上的微分算子，也是可以作用在微分形式上的微分算子，而外微分算子 d 则是仅仅能作用在微分形式上的微分算子。

③ L_X 存在的前提是流形上需要给定向量场 X；d 不需要在流形上的任何附加结构。

§2.4 内积算子 i_X 和三个 Cartan 公式

矢量 $X=\xi^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ 与微分形式 $w=w_{i_1,i_2,\cdots,i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$ 的内积是一种运算，用符号 $i_X w$ 或 $i(X)w$ 来表示。i_X 的性质是：

(1) i_X 使 p-形式降为 p-1 形式。

(2) $i_X f=0$ (2.4.1)

其中 f 是普通函数。

(3) $i_X\mathrm{d}x^j=\xi^j$ (2.4.2)

相当于 $\langle \mathrm{d}x^j, X\rangle=\xi^j$（见(1.3.7)式），可见 i_X 是第1章说过的矢量 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与1-形式 $\mathrm{d}x^j$ 的收缩的一种推广。

(4) $i_X i_X=0$ (2.4.3)

证明 设有 $w_{i_1,i_2,i_3,\cdots}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\mathrm{d}x^{i_3}\wedge\cdots$，其中 $w_{i_1,i_2,i_3,\cdots}$ 对 $i_1,i_2,i_3,\cdots$ 全反对称，则

$$i_X w=\xi^j w_{ji_2i_3\cdots}\mathrm{d}x^{i_2}\mathrm{d}x^{i_3}\wedge\cdots$$

$$i_X i_X w=\xi^j\xi^k w_{jki_3\cdots}\mathrm{d}x^{i_3}\wedge\cdots=0$$

因为 $\xi^j\xi^k$ 对 jk 对称，$w_{jki_3\cdots}$ 对 jk 反对称，得证。

(5) i_X 是奇微分算子,有如下性质:

$$i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X\alpha_p) \wedge \beta_q + (i_X\beta_q)(-1)^{pq} \wedge \alpha_p \qquad (\alpha_p, \beta_q \text{ 对易})$$

$$= (i_X\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^{pq}(-1)^{p(q-1)}\alpha_p \wedge (i_X\beta_q) \qquad (\alpha_p, i_X\beta_q \text{ 对易})$$

$$= (i_X\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge (i_X\beta_q) \tag{2.4.4}$$

以下就来证明三个 Cartan 公式。

1. $[L_X, d] = 0$

证明

(1) 作用在 f 上:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

$$L_X df = \xi^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}dx^k$$

(见(2.3.4)式)

$$L_X f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$dL_X f = \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}dx^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^k$$

所以 $[L_X, d]f = 0$ (2.4.5)

(2) 作用在 1-形式上,$w = w_j dx^j$:

$$dw = d(w_j dx^j) = \frac{\partial w_j}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^j$$

$$L_X dw = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^k \partial x^i}\xi^k dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}dx^k \wedge dx^j + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}dx^i \wedge dx^k$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^i \partial x^k}\xi^k dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial w_j}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}dx^i \wedge dx^j\right)$$

$$\mathrm{L}_X w=\left(w_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}+\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^k\right)\mathrm{d}x^i$$

（见(2.3.4)式）

$$\mathrm{dL}_X w=\left(\frac{\partial w_k}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}+w_k \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial x^i \partial x^j}+\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^k \partial x^i}\xi^k+\frac{\partial w_j}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

（第二项$\partial x^i \partial x^j$ 对称，得 0）

所以 $[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]w=0$ (2.4.6)

(3) 作用在 $w^A \wedge w^B$ 上，并设$[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]w^A=0$，$[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]w^B=0$：

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_X\mathrm{d}(w^A \wedge w^B)&=\mathrm{L}_X(\mathrm{d}w^A \wedge w^B+w^A \wedge \mathrm{d}w^B)\\&=\mathrm{L}_X\mathrm{d}w^A \wedge w^B+\mathrm{d}w^A \wedge \mathrm{L}_X w^B\\&\quad+\mathrm{L}_X w^A \wedge \mathrm{d}w^B+w^A \wedge \mathrm{L}_X\mathrm{d}w^B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dL}_X(w^A \wedge w^B)&=\mathrm{d}(\mathrm{L}_X w^A \wedge w^B+w^A \wedge \mathrm{L}_X w^B)\\&=\mathrm{dL}_X w^A \wedge w^B+\mathrm{L}_X w^A \wedge \mathrm{d}w^B\\&\quad+\mathrm{d}w^A \wedge \mathrm{L}_X w^B+w^A \wedge \mathrm{dL}_X w^B\end{aligned}$$

所以$[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}](w^A \wedge w^B)=[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]\mathrm{d}w^A \wedge w^B+w^A \wedge [\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]w^B$

$=0$

总之，无论对于何种 n-形式 w^n（包括 0-形式），下式都成立：

$[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]w^n=0$ (2.4.7)

所以$[\mathrm{L}_X,\mathrm{d}]=0$ (2.4.8)

2. $\mathrm{L}_X=\mathrm{d}\cdot \mathrm{i}_X+\mathrm{i}_X\cdot \mathrm{d}$

证明

(1) 作用在 f 上（取 $X=\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，并利用(2.4.2)式）：

$$\mathrm{L}_X f=\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$(\mathrm{d}\cdot \mathrm{i}_X+\mathrm{i}_X\cdot \mathrm{d})f=\mathrm{i}_X\cdot \mathrm{d}f=\mathrm{i}_X \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

所以 $L_X f=(d\cdot i_X+i_X\cdot d)f$ (2.4.9)

(2) 作用在 1-形式上：

$$L_X w_i dx^i=\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^k}\xi^k+w_i\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)dx^j;$$

$$\begin{aligned}(d\cdot i_X+i_X\cdot d)w_i dx^i&=d\cdot w_i\xi^i+i_X\cdot\frac{\partial w_i}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^i\\&=\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^i dx^k+w_i\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}dx^k\\&\quad+\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^k dx^i-\frac{\partial w_i}{\partial x^k}dx^k\xi^i\\&=\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^k+w_j\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)dx^i\end{aligned}$$

所以 $L_X w_i dx^i=(d\cdot i_X+i_X\cdot d)w_i dx^i$ (2.4.10)

(3) 作用在 $w_{p+q}=\alpha_p\wedge\beta_q$ 上：其中 α_p 为 p-形式，β_q 为 q-形式，而且已知 $L_X\alpha_p=(d\cdot i_X+i_X\cdot d)\alpha_p$，$L_X\beta_q=(d\cdot i_X+i_X\cdot d)\beta_q$，就可得

$$L_X(\alpha_p\wedge\beta_q)=(L_X\alpha_p)\wedge\beta_q+(L_X\beta_q)(-1)^{pq}\wedge\alpha_p$$

(参见(2.4.4)式推导)

$$\begin{aligned}&=[(d\cdot i_X+i_X\cdot d\alpha_p]\wedge\beta_q\\&\quad+[(d\cdot i_X+i_X\cdot d)\beta_q(-1)^{pq}\wedge\alpha_p]\end{aligned}$$

已知 L_X 和 $(d\cdot i_X+i_X\cdot d)$ 都不会改变 α_p 和 β_q 的张量类型，所以

$$\begin{aligned}L_X(\alpha_p\wedge\beta_q)&=[(d\cdot i_X+i_X\cdot d)\alpha_p]\wedge\beta_q\\&\quad+\alpha_p\wedge[(d\cdot i_X+i_X\cdot d)\beta_q]\\&=[(d\cdot i_X+i_X\cdot d)(\alpha_p\wedge\beta_q)]\end{aligned}$$

即

$$L_X w_{p+q}=(d\cdot i_X+i_X\cdot d)w_{p+q} \tag{2.4.11}$$

故无论对于何种形式 w^n(包括 0-形式)，下式都成立：

$$L_X=(d\cdot i_X+i_X\cdot d) \tag{2.4.12}$$

3. $[\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] = \mathrm{i}_{[X,Y]}$

证明

(1) 作用在 f 上:

$$\mathrm{L}_X \cdot \mathrm{i}_Y f - \mathrm{i}_Y \cdot \mathrm{L}_X f = 0 - \mathrm{i}_Y \cdot \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 = \mathrm{i}_{[X,Y]} f$$

(2) 作用在 1-形式上:

$$w = w_i \mathrm{d}x^i$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_X \cdot \mathrm{i}_Y w_i \mathrm{d}x^i - \mathrm{i}_Y \cdot \mathrm{L}_X w_i \mathrm{d}x^i = \mathrm{L}_X w_i \eta^i - \mathrm{i}_Y \\
\cdot \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^k + w_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \\
= \xi^j \eta^i \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} w_i - \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^k}\xi^k + w_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\eta^i \\
= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) w_i \\
= \mathrm{i}_{[X,Y]} w_i \mathrm{d}x^i
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

因为

$$\begin{aligned}
[X,Y] = \left[\xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \eta^q \frac{\partial}{\partial x^q}\right] = \xi^k \frac{\partial \eta^q}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^q} - \eta^q \frac{\partial \xi^k}{\partial x^q}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
= \left(\xi^k \frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^q}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^q}
\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{i}_{[X,Y]} w_q \mathrm{d}x^q = \left(\xi^k \frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}\right) w_q \qquad \text{(即(2.4.13)式)}$$

(3) 作用在 $w_{p+q} = w_p \wedge w_q$ 上, w_p 和 w_q 分别是 p-形式和 q-形式,而且已知 $[\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] w_p = \mathrm{i}_{[X,Y]} w_p$, $[\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] w_q = \mathrm{i}_{[X,Y]} w_q$,于是

$$\begin{aligned}
[\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y](w_p \wedge w_q) = ([\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] w_p) \wedge w_q \\
+ ([\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] w_q)(-1)^{pq} \wedge w_p \\
= (\mathrm{i}_{[X,Y]} w_p) \wedge w_q
\end{aligned}$$

$$+(\mathrm{i}_{[X,Y]}w_q)(-1)^{pq}\wedge w_p$$
$$=\mathrm{i}_{[X,Y]}(w_p\wedge w_q)$$

即

$$[\mathrm{L}_X,\mathrm{i}_Y]w_{p+q}=\mathrm{i}_{[X,Y]}w_{p+q}$$

于是下式一般都成立：

$$[\mathrm{L}_X,\mathrm{i}_Y]=\mathrm{i}_{[X,Y]} \tag{2.4.14}$$

在微分形式的分析中，式(2.4.8)，(2.4.12)，(2.4.14)三个 Cartan 公式都是有用处的。

§ 2.5　齐李群空间

如果 M 是一个微分流形，李群 G 可迁地作用在 M 上，就称 G 为 M 上的一个**可迁变换群**，M 称为 G 的**群流形**。“可迁”的含义是：对 M 中任意两点 x,y，总存在 G 中的元素 g 将 x 变到 y，即 $gx=y$。

举例如下：

我们考察 $SU(2)$ 群，$SU(2)$ 群的所有的矩阵都具有如下形式：

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix},\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=1 \tag{2.5.1}$$

$SU(2)$ 群的三个生成元是：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

于是每一个群元 g 都可写成($n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$)[①]，

$$g=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma/2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\left(\frac{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma}{2}\right)$$

① 任何 $SU(2)$ 群的群元都可写成 $\exp(\mathrm{i}\alpha_a X_a)$，其中 $\alpha_a(a=1,2,\cdots,n)$ 是实参数，X_a 是互相线性独立的厄米算子，要对重复的 a 求和。

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma}{2}\right)^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma}{2}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(\frac{\mathrm{i}\theta n\cdot\sigma}{2}\right)^5+\cdots \tag{2.5.3}$$

把

$$(n\cdot\sigma)^2=(n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3)(n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3)$$

$$=(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{2.5.4}$$

代入(2.5.3)式,得

$$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4-\cdots\right)$$

$$+\left(\mathrm{i}(n\cdot\sigma)\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{\mathrm{i}}{3!}(n\cdot\sigma)\left(\frac{\theta}{2}\right)^3+\frac{\mathrm{i}}{5!}(n\cdot\sigma)\left(\frac{\theta}{2}\right)^5-\cdots\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\mathrm{i}n\cdot\sigma\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.5.5}$$

注意 这里的 θ 是 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。

(2.5.5)式又可写成:

$$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}x_0+\mathrm{i}\sigma_1x_1+\mathrm{i}\sigma_2x_2+\mathrm{i}\sigma_3x_3$$

其中

$$x_0=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\qquad x_1=n_1\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$x_2=n_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\qquad x_3=n_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.5.6}$$

所以 $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ (2.5.7)

可见(2.5.6)式给出的 g 的参数(x_0,x_1,x_2,x_3)必定是 S^3 上的某个点的坐标。所以,(2.5.7)式所代表的超球面 S^3 就是 $SU(2)$群的群流形。

还应该看到，如果给定了两个群元 g_1, g_2，就一定可以在 S^3 上找到两个点 $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$，$x'=(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$，和 g_1, g_2 对应。还一定可以找到一个 g，使得

$$g \cdot g_1 = g_2 \tag{2.5.8}$$

因为 g 只有 4 个待定参数，而 $g \cdot g_1 = g_2$ 正好给出 4 个条件，所以 g 的解是存在唯一的。

因此，(2.5.7)式的 S^3 流形就是李群 SU(2)的“群流形”；SU(2)则可称为 S^3 流形的“可迁变换群”。

以下顺便介绍几个与群流形有关的名词：

设 x 是 M 上的点，g 是 G 群的群元素：

(1) 如果存在 $g \in G, gx = x, \forall x \in M$，则 $g = e$ 是恒等元，此时称 G **有效地**(effectively)**作用于** M(恒等元 e 只有一个)。

(2) 如果有一个点 $x_0 \in M$(但不是 $\forall x \in M$)，而且有一组 g(不是一个 g)满足 $gx_0 = x_0$，则这组 g 形成 G 的一个子群 G_{x_0}：

$$G_{x_0} = \{g \in G \mid g x_0 = x_0 \in M\} \tag*{(2.5.9)$_1$}$$

G_{x_0} 称为 x_0 点的**迷向子群**(isotropic subgroup)。

(3) 如果 x_0 点有迷向子群 G_{x_0}，则满足 $G_{x_0} x_0 = x_0$。再取另一个点 $g x_0 = x$，必有

$$(gG_{x_0} g^{-1})x = gG_{x_0} x_0 = g x_0 = x$$

可见，在 $gx_0 = x$ 点也必有迷向子群 G_x：

$$G_x = gG_{x_0} g^{-1} = \{g' \in G \mid g'x = x \in M\} \tag*{(2.5.9)$_2$}$$

这里 g 由 $gx_0 = x$ 唯一确定，所以 $G_x = gG_{x_0} g^{-1}$ 与 G_{x_0} 是同构的。依此类推，若有一个点 x_0 有迷向子群 G_{x_0}，则每一个点 x 都有迷向子群 G_x，而且**各迷向子群** G_{x_0} **,** G_{x_1} **,** G_{x_2} **,… 相互同构**。

(4) 若有一点 $x_0 \in M$，在群 G 的所有元素 g 的作用下，则所可能达到的各点的集合 O_{x_0} 称为群 G 的轨道，记作

$$O_{x_0} \equiv G_{x_0} \equiv \{gx_0 \mid g \in G\} \in M$$

(5) 若两个轨道有交：$O_{x_0}\cap O_{x'_0}\neq\varnothing$，则 G_{x_0} 所能达到的点必定也是 $G_{x'_0}$ 所能达到的点，即 $O_{x_0}=O_{x'_0}$。

证明 在 $O_{x_0}\cap O_{x'_0}$ 中任取一点 x，则必有 $gx_0=x, g'x'_0=x$。于是

$$x_0=g^{-1}x=g^{-1}g'x'_0=g''x'_0$$

可见 G_{x_0} 所能达到的点，必定也是 $G_{x'_0}$ 所能达到的点。从而

$$O_{x_0}=O_{x'_0} \text{ 当 } O_{x_0}\cap O_{x'_0}\neq\varnothing$$

(6) 由于不同的轨道一定不相交，所以不同的轨道就构成流形 M 的划分。如果把每一个轨道看作是一个点，则这些点构成的流形就叫做**轨道空间** M/G。

例 $O(n)/O(n-1)=S^{n-1}$。 (2.5.10)

说明 已知当 R 给定时，n 维正交群 $O(n)$（$O(n)=\{A\,|\,A=n\times n$ 矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=E\}$）的轨道是半径为 R 的 S^{n-1}（$n-1$ 维球面，$S^{n-1}=\left\{x\,\middle|\,|x|=R\right\}$）。但 $O(n):S^{n-1}\to S^{n-1}$ 不是 $1:1$ 对应地映射到 S^{n-1} 上每个点，有一个 $O(n-1)$ 迷向群（例如 S^2 上任取一点 x_0，并以 x_0 点为南极或北极，作 $O(2)$ 旋转，则 $O(2):x_0\to x_0$。可见 S^2 上每一点都有一个迷向子群 $O(2)$）。因此，S^{n-1} 上的每一个点对应于 $O(n)/O(n-1)$ 的每一个点。（$O(n-1)$ 是 $O(n)$ 中的迷向子群）

§2.6 李群空间上的不变向量场和不变余向量场

在李群 G 中任取一个群元 $g\in G$，定义李群流形 G 的左平移映射 L_a 如下：

$$\mathrm{L}_a:G\to G$$

$$g\to \mathrm{L}_a(g)=ag\in G \quad (a,g\text{ 都是群元}) \tag{2.6.1}$$

若切向量 $X(g)$ 是**左不变的**，则 L_a 作用在 M 上 g 点的切向量 $X(g)$ 上时，**要求**满足

$$L_a X(g)=X(L_a(g))=X(ag) \tag{2.6.2}$$

所以，对于左不变向量场，必定有

$$L_g X(e)=X(L_g(e))=X(ge)=X(g) \quad (\forall g\in G) \tag{2.6.3}$$

就是说，当 g 跑遍 G，恒等元 e 处的一个向量 $X(e)$ 可以通过左同胚变换给出群上的一个向量场 $X(g)$，而且这个向量场显然是左不变的，因为自(2.6.3)式得到

$$L_a X(g)=X(L_a(g))=X(ag)$$

正好符合(2.6.2)式关于左不变的要求。

李群 G 的群流形 M 上的左不变向量场是在 M 上整体定义的，而且都是可微向量场。

由于 n 维李群 G 有 n 个互相独立的群元 $g_1,g_2,\cdots,g_n$，所以满足(2.6.2)式的左不变向量场 $X(g_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 应该有 n 个，它们都满足：

$$L_a X(g_i)=X(L_a(g_i))=X(ag_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

在齐性空间的 e 点的 n 个左不变向量场 $X(g_i)$ 张开一个 n 维的左不变切空间 $T_e(G)$。

$$L_g: T_e(G)\rightarrow T_g(G) \tag{2.6.4}$$

当 g 跑遍 G，就得到 G 上的一个左不变切丛 $T(G)$（所有的 $T_g(G)$ 的集合）。

右不变向量场的讨论和左不变向量场类似，就不重复了。

以上讨论的是不变向量场，它的特点是把群元素 $g\in G$ 与齐性流形 M 上相对应的 g 点的切向量 $X(g)$ 联系起来，建立一一对应关系，使对于每一个 $g\in G$ 都成立。（见(2.6.2)，(2.6.3)式）

不变余向量场的情况也有些类似。设 w 是群流形上的余切向量(1-形式)，如果 w 满足

$$L_a w = w^{①} \quad \forall a \in G \quad (G\text{是一个矩阵群}) \tag{2.6.5}$$

就称为左不变形式，例如 Maurer-Cartan 形式

$$w = g^{-1}\mathrm{d}g \tag{2.6.6}$$

是一个 1-形式，群元 g 可连续变化。对 g 左作用一个常数群元 g_0，$g \to g_0 g$，就得

$$L_{g_0} w = (g_0 g)^{-1}\mathrm{d}(g_0 g) = g^{-1}g_0^{-1}g_0\mathrm{d}g = g^{-1}\mathrm{d}g = w \tag{2.6.7}$$

表明 w 确是一个左不变的 1-形式。

可以把左不变 1-形式 w 按李代数 G 中的常矩阵 λ_a 来展开：

$$w = g^{-1}\mathrm{d}g = \Phi_a \frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}} \tag{2.6.8}$$

在式(2.6.8)中，λ_a 都是互相独立的，所以每一个 Φ_a 都是左不变的 1-形式。

由 $\mathrm{d}(g^{-1}g) = 0 \to \mathrm{d}g^{-1}\cdot g + g^{-1}\cdot \mathrm{d}g = 0$ 得

$$\mathrm{d}g^{-1} + g^{-1}\mathrm{d}g g^{-1} = 0 \tag*{(2.6.9)$_1$}$$

由 $\mathrm{d}(\mathrm{d}(g^{-1}g)) = \mathrm{d}(\mathrm{d}g^{-1}\cdot g) + \mathrm{d}(g^{-1}\cdot \mathrm{d}g) = 0$ 得

$$-\mathrm{d}g^{-1} \wedge \mathrm{d}g + \mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g) = 0 \tag{2.6.10}$$

将(2.6.9)$_1$ 式代入(2.6.10)式得

$$g^{-1}\mathrm{d}g g^{-1} \wedge \mathrm{d}g + \mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g) = 0$$

整理后写成

$$g^{-1}\mathrm{d}g \wedge g^{-1}\mathrm{d}g + \mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g) = 0 \tag{2.6.11}$$

再把(2.6.8)式代入(2.6.11)式，得

$$\mathrm{d}\Phi_a \frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}} + \Phi_b \frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}} \wedge \Phi_c \frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}} = 0 \tag{2.6.12}$$

式(2.6.12)是 Maurer-Cartan 结构方程的第一种形式(矩阵形式)，它反映了左不变余向量场的特性。

① 在数学书上有时把作用在切向量上的 L_a 写成 L_{a*}，把作用在余切向量上的 L_a 写成 L_a^*，这里都把 * 省略了。

(2.6.12)式又可写成

$$0=\mathrm{d}\Phi_a\frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}}+\frac{1}{2}\Phi_b\frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}}\wedge\Phi_c\frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}}+\frac{1}{2}\Phi_c\frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}}\wedge\Phi_b\frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}}$$

$$=\mathrm{d}\Phi_a\frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}}+\frac{1}{2}\Phi_b\wedge\Phi_c\left[\frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}},\frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}}\right]_-$$

$$\rightarrow\mathrm{d}\Phi_a+\frac{1}{2}f_{abc}\Phi_b\wedge\Phi_c=0 \tag{2.6.13}$$

(2.6.13)式是 Maurer-Cartan 结构方程的第二种形式，f_{abc} 是李群 G 中与常数矩阵$[\lambda_a,\lambda_b]$有关的结构常数。

我们再来考察右不变的情况。取右不变的 Maurer-Cartan 形式：

$$w'=\mathrm{d}g\cdot g^{-1} \tag{2.6.14}$$

$$R_{g_0}w'=\mathrm{d}(gg_0)\cdot(gg_0)^{-1}=\mathrm{d}gg_0g_0^{-1}g=\mathrm{d}g\cdot g^{-1}=w' \tag{2.6.15}$$

表明 w'是右不变 1-形式。按常矩阵 λ_a 展开：

$$w'=\mathrm{d}g\cdot g^{-1}=\Phi'_a\frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}} \tag{2.6.16}$$

每个 Φ'_a 都是右不变的 1-形式

$$\mathrm{d}(gg^{-1})=0\rightarrow\mathrm{d}g\cdot g^{-1}+g\cdot\mathrm{d}g^{-1}=0$$

则得

$$\mathrm{d}g^{-1}+g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}=0 \quad (\text{和}(2.6.9)_1\text{ 式相同}) \tag{2.6.9$_2$}$$

由 $\mathrm{d}(\mathrm{d}(gg^{-1}))=\mathrm{d}(\mathrm{d}g\cdot g^{-1})+\mathrm{d}(g\cdot\mathrm{d}g^{-1})=0$ 得

$$-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g^{-1}+\mathrm{d}(g\cdot\mathrm{d}g^{-1})=0 \tag{2.6.17}$$

(2.6.17)式又可写成

$$-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g^{-1}-\mathrm{d}(\mathrm{d}g\cdot g^{-1})=0$$

利用$(2.6.9)_2$ 式得

$$\mathrm{d}gg^{-1}\wedge\mathrm{d}gg^{-1}-\mathrm{d}(\mathrm{d}g\cdot g^{-1})=0 \tag{2.6.18}$$

再把(2.6.16)式代入，得

$$\Phi_a{}'\frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}}\wedge\Phi_b{}'\frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}}-\mathrm{d}\left(\Phi_c{}'\frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}}\right)=0 \tag{2.6.19}$$

$$\rightarrow \mathrm{d}\Phi_c{}'\frac{\lambda_c}{2\mathrm{i}}-\frac{1}{2}\Phi_a{}'\wedge\Phi_b{}'\left[\frac{\lambda_a}{2\mathrm{i}},\frac{\lambda_b}{2\mathrm{i}}\right]_-$$

$$\rightarrow \mathrm{d}\Phi_a{}'-\frac{1}{2}f_{abc}\Phi_b{}'\wedge\Phi_c{}'=0 \tag{2.6.20}$$

可见，从左不变和右不变得到的 Maurer-Cartan 结构方程(2.6.13)式和(2.6.20)式是相似的，只是$\frac{1}{2}f_{abc}\Phi_b\wedge\Phi_c$ 项相差一个正负号，另外还有一个更简捷的推导：自 $g^{-1}g=I$，

$$(\mathrm{d}g^{-1})g+g^{-1}(\mathrm{d}g)=0\rightarrow \mathrm{d}g^{-1}=-g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}$$

对 $w=g^{-1}\mathrm{d}g$：

因为 $\mathrm{d}w=\mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g=-g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}\wedge\mathrm{d}g$

$$=-g^{-1}\wedge g\mathrm{d}g^{-1}\mathrm{d}g=-w\wedge w$$

所以 $\mathrm{d}w+w\wedge w=0$

即(2.6.11)式。

对 $w'=\mathrm{d}gg^{-1}$：

因为 $\mathrm{d}w'=-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g^{-1}=\mathrm{d}gg^{-1}\wedge\mathrm{d}gg^{-1}=w'\wedge w'$

所以 $\mathrm{d}w'-w'\wedge w'=0$

即(2.6.18)式。

第3章　曲率张量和挠率张量、协变微分、伴随外微分

§3.1　协变微分与联络

前面引入的微分算子 d 和李导数 L_X 都不能用来表述微分流形中相邻两点上的切空间之间的协变性质的联系。现在我们采用引入联络的办法，来达到在切丛 $T(M)$、余切丛 $T^*(M)$ 和张量丛 $T_s^r(M)$ 上定义协变微分的目的。

在微分流形 M 的任意一个点 P 上，前面取的切空间 $T_P(M)$ 的基矢组为 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$，余切空间 $T_P^*(M)$ 的基矢组为 $\{\mathrm{d}x^i\}$。这两种基矢组统称为自然标架。

在自然标架中，$\mathrm{d}x^i$ 代表以 P 点为起点的没有确定大小的微小距离，换句话说，它的位置不仅包括 P 点，而且还包括 P 邻近的点，和 P 点其他的几何量有所不同。但由于以后推导曲率张量时，需要利用 $\mathrm{d}x^i$ 来代表微小的位移，所以为了方便，以下仍沿用自然标架。

有了自然标架还可以进一步定义张量空间 $T_{P_s}^{\ r}(M)$，其中的任何一个张量都可以写成如下形式：

$$W^{j_1 j_2 \cdots j_r}_{i_1 i_2 \cdots i_s}(x)\partial_{j_1}\otimes\partial_{j_2}\otimes\cdots\partial_{j_r}\otimes\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\mathrm{d}x^{i_2}\otimes\cdots\mathrm{d}x^{i_s} \tag{3.1.1}$$

M 上所有各点 P 的张量空间的并集可写成

$$T_s^r(M)=\bigcup_P T_{P_s}^{\ r}(M) \tag{3.1.2}$$

它就是张量丛。为了对照，列出下列关系式：

向量丛： $T(M)=\bigcup_P T_P(M)$

$T_P(M)$是 P 点切向量空间。

余切向量丛： $T^*(M)=\bigcup_P T^*_P(M)$

$T^*_P(M)$是 P 点余切向量空间。

张量丛： $T^r_s(M)=\bigcup_P T_{P}{}^r_s(M)$

$T_{P}{}^r_s(M)$是 P 点张量空间。

在此基础上，我们引入协变微分∇。∇也是一种映射：

$$\nabla: \left.\begin{array}{l} T_{P}{}^r_s(M)\rightarrow T_{P}{}^r_{s+1}(M) \\ K\in T_{P}{}^r_s(M)\rightarrow \nabla K\in T_{P}{}^r_{s+1}(M) \end{array}\right\} \tag{3.1.3}$$

这里∇K 就是 K 的协变微分，∇有下列性质：

(1) 线性：$\nabla(aK+bK')=a\nabla K+b\nabla K'$ (3.1.4)

(a，b 是常数)

(2) 服从 Leibniz 规则，例如：

$$\nabla(K\otimes K')=(\nabla K)\otimes K'+K\otimes(\nabla K') \tag{3.1.5}$$

(3) 对于一般函数 f，

$$\nabla f=\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{3.1.6}$$

(4) 对于切向量场，$X=\xi^a\dfrac{\partial}{\partial x^a}$，

① $\xi^a(x)$是一个函数，根据(3.1.6)式，

$$\nabla\xi^a(x)=\mathrm{d}\xi^a(x)=\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

②对于$\dfrac{\partial}{\partial x^a}$，要引入联络 $\Gamma^b_a(x)$：

$$\nabla\frac{\partial}{\partial x^a}=\Gamma^b_a(x)\frac{\partial}{\partial x^b}$$

所以 $\nabla X=\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^a}+\xi^a\cdot\Gamma_a^b(x)\frac{\partial}{\partial x^b}$

即协变微分使第一项增加了一个 $\mathrm{d}x^i$，因此在 $\Gamma_a^b(x)$ 中也要引入 $\mathrm{d}x^i$，使 $\Gamma_a^b(x)=\Gamma_{i\,a}^{\ b}(x)\mathrm{d}x^i$ 成为 1-形式，所以又写成

$$
\begin{aligned}
\nabla X&=\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^a}+\xi^b\cdot\Gamma_{i\,b}^{\ a}\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^a}\\
&=\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}+\Gamma_{i\,b}^{\ a}\xi^b\right)\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^a}
\end{aligned}
\tag{3.1.7}
$$

这里

$$
\Gamma_a^b(x)=\Gamma_{ia}^b(x)\mathrm{d}x^i \tag{3.1.8}
$$

称为**联络 1-形式**，一共有 n^2 个联络 1-形式。

③ 对于 $\mathrm{d}x^a$，我们利用 $\langle\mathrm{d}x^a,\frac{\partial}{\partial x^b}\rangle=\delta_b^a$ 和 $\nabla\frac{\partial}{\partial x^a}=\Gamma_a^b(x)\frac{\partial}{\partial x^b}$，得

$$
0=\nabla\langle\mathrm{d}x^a,\frac{\partial}{\partial x^b}\rangle=\langle\nabla\mathrm{d}x^a,\frac{\partial}{\partial x^b}\rangle+\langle\mathrm{d}x^a,\nabla\frac{\partial}{\partial x^b}\rangle
$$

$$
\to\langle\nabla\mathrm{d}x^a,\frac{\partial}{\partial x^b}\rangle+\Gamma_b^a(x)=0
$$

所以 $\nabla\mathrm{d}x^a=-\Gamma_b^a(x)\mathrm{d}x^b$

把②和③得到的两个关系式对照一下：

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla\frac{\partial}{\partial x^a}&=\Gamma_a^b(x)\frac{\partial}{\partial x^b}\\
\nabla\mathrm{d}x^a&=-\Gamma_b^a(x)\mathrm{d}x^b
\end{aligned}\right\}
\tag{3.1.9}
$$

可见是很有规律的。现在要问，在坐标变换后，是否仍有同样的规律？

我们取坐标变换矩阵 $\Lambda_b^a(x)$，令 $\mathrm{d}x^a$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^a}$ 的变换为：

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}x'^a&=\Lambda^{-1}{}_b^a(x)\mathrm{d}x^b\\
\frac{\partial}{\partial x'^a}&=\Lambda_a^b(x)\frac{\partial}{\partial x^b}
\end{aligned}\right\}
\tag{3.1.10}
$$

利用

$$\Lambda^{-1}(x)\Lambda(x)=I\to\nabla\Lambda^{-1}(x)=-\Lambda^{-1}(x)(\nabla\Lambda(x))\Lambda^{-1}(x)$$

$$\nabla \mathrm{d}x^a=-\Gamma^a_b(x)\mathrm{d}x^b$$

可以求出变换后的 $\Gamma'^a_b(x)$：

$$\begin{aligned}\nabla \mathrm{d}x'^a &=\nabla(\Lambda^{-1}{}^a_b(x)\mathrm{d}x^b)\\ &=(\nabla\Lambda^{-1}{}^a_b(x))\mathrm{d}x^b+\Lambda^{-1}{}^a_b(x)\nabla \mathrm{d}x^b\\ &=-\Lambda^{-1}{}^a_c(x)(\nabla\Lambda^c_d(x))\Lambda^{-1}{}^d_b(x)\mathrm{d}x^b-\Lambda^{-1}{}^a_c(x)\Gamma^c_b(x)\mathrm{d}x^b\\ &=-\Lambda^{-1}{}^a_c(x)(\nabla\Lambda^c_d(x))\mathrm{d}x'^d-\Lambda^{-1}{}^a_c(x)\Gamma^c_d(x)\Lambda^d_e\mathrm{d}x'^e\\ &=-[\Lambda^{-1}{}^a_c(x)(\nabla\delta^c_d+\Gamma^c_d(x))\Lambda^d_e(x)]\mathrm{d}x'^e\\ &=-\Gamma'^a_e(x)\mathrm{d}x'^e\end{aligned}$$

再利用 $\langle \mathrm{d}x'^a,\frac{\partial}{\partial x'^b}\rangle=\Lambda^{-1}{}^a_c(x)\Lambda^d_b(x)\langle \mathrm{d}x^c,\frac{\partial}{\partial x^d}\rangle=\delta^a_b$ 得

$$\begin{aligned}0&=\langle\nabla \mathrm{d}x'^a,\frac{\partial}{\partial x'^b}\rangle+\langle \mathrm{d}x'^a,\nabla\frac{\partial}{\partial x'^b}\rangle\\ &=-\Gamma'^a_b(x)+\langle \mathrm{d}x'^a,\nabla\frac{\partial}{\partial x'^b}\rangle\end{aligned}$$

所以 $\langle \mathrm{d}x'^a,\nabla\frac{\partial}{\partial x'^b}\rangle=\Gamma'^a_b(x)\to\nabla\frac{\partial}{\partial x'^b}=\Gamma'^a_b(x)\frac{\partial}{\partial x'^a}$

于是得到(3.1.9)式变换后的形式：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\frac{\partial}{\partial x'^a}&=\Gamma'^b_a(x)\frac{\partial}{\partial x'^b}\\ \nabla \mathrm{d}x'^a&=-\Gamma'^a_b(x)\mathrm{d}x'^b\end{aligned}\right\}\tag{3.1.11}$$

$$\Gamma'^a_e(x)=\Lambda^{-1}{}^a_c(x)(\nabla\delta^c_d+\Gamma^c_d(x))\Lambda^d_e(x)\tag{3.1.12}$$

对比(3.1.11)式和(3.1.9)式，可明显看到 Λ 变换前后的 ∇ 微分的形式是完全相似的，这是协变微分的特点。所以我们把 ∇ 微分称为协变微分。

当流形上有切向量场 $X(x)=\xi^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}$ 时，又可以定义方向协

变微分如下：

(1) 设有一个张量场 K，则 K 的协变微分是 $\nabla K=\mathrm{d}x^i\nabla_i K$，而

$$\nabla_i K=\langle\nabla K,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle \tag{3.1.13$_1$}$$

是 K 的 i 方向协变微分。

(2) 设有一个切矢量场 $X(x)=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$，则 K 在 X 方向的协变微分是

$$\begin{aligned}\nabla_X K&=\langle\nabla K,X\rangle=\langle\mathrm{d}x^i\nabla_i K,\xi^j(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\&=\xi^i(x)\nabla_i K\end{aligned} \tag{3.1.13$_2$}$$

(3) 张量 K 在 $fX+gY=f\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+g\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 方向的协变微分是

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY}K&=\langle\nabla K,fX+gY\rangle=f\langle\nabla K,X\rangle+g\langle\nabla K,Y\rangle\\&=f\xi^i(x)\nabla_i K+g\eta^i(x)\nabla_i K\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

(4) 取 $K=X(x)=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 时，利用(3.1.8)式和(3.1.9)式：

$$\begin{aligned}\nabla X(x)&=(\nabla\xi^i(x))\frac{\partial}{\partial x^i}+\xi^i(x)\nabla\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\ \frac{\partial}{\partial x^k}+\xi^i(x)\Gamma_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\\&=\left(\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}+\xi^i(x)\Gamma_{ji}^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\mathrm{d}x^j\\&=\left(\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}+\xi^q(x)\Gamma_{jq}^k(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot\mathrm{d}x^j\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

所以，根据(3.1.13)$_1$ 式

$$\nabla_i X(x)=\langle\nabla X(x),\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle$$

$$=\langle\left(\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}+\xi^q(x)\Gamma^k_{jq}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\mathrm{d}x^j,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}+\xi^q(x)\Gamma^k_{iq}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\equiv\xi^k_{;i}\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (3.1.16)_1$$

$$\xi^k_{;i}=(\nabla_i X)^k=\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}+\xi^q(x)\Gamma^k_{iq}(x) \qquad (3.1.16)_2$$

对任意张量(见(3.1.1)式),都可用类似方法根据其中含有的每一个 $\mathrm{d}x^i$ 和每一个∂_j 来确定其协变微分。

§ 3.2 流形上向量的迁移及曲率和挠率

根据§ 2.2 叙述的 Frobenius 定理,如果在流形 M 上定义了 m 个光滑的切向量场的集合 $\Sigma^m=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$,而且这些切向量场的任何一组李括号$[X_i,X_j]$都可写成 $X_1,\cdots,X_m$ 的线性组合,那么,这些向量场的积分曲线必定能交织成一族子流形,从而可以建立子流形上的坐标系。

有了坐标系以后,为了保持各种向量和张量在子流形上移动后不改变其向量和张量的性质,就必须要求向量和张量在流形上移动时,按照协变微分的规律发生变化。

先来考察协变迁移。

设有一条曲线 C 通过 P 点,P 点的坐标是(x^i),曲线 C 在 P 点的切向量是 $X=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x^i(x)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$。其中 $\xi^i(x)$代表曲线 C 在 P 点的切向量的方向。

另外再取一个切向量 $Y(x)=\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$,根据(3.1.15)式和(3.1.16)式,得

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla Y(x)=\left(\frac{\partial\eta^k(x)}{\partial x^j}+\eta^q(x)\Gamma^k_{jq}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot \mathrm{d}x^j\\
&\nabla_i Y(x)=\langle\nabla Y,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\
&\qquad=\left(\frac{\partial\eta^k(x)}{\partial x^i}+\eta^q\Gamma^k_{iq}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\\
&\nabla_X Y(x)=\langle\nabla Y,\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\
&\qquad=\xi^i(x)\left(\frac{\partial\eta^k(x)}{\partial x^i}+\eta^q(x)\Gamma^k_{iq}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}\right\}\tag{3.2.1}$$

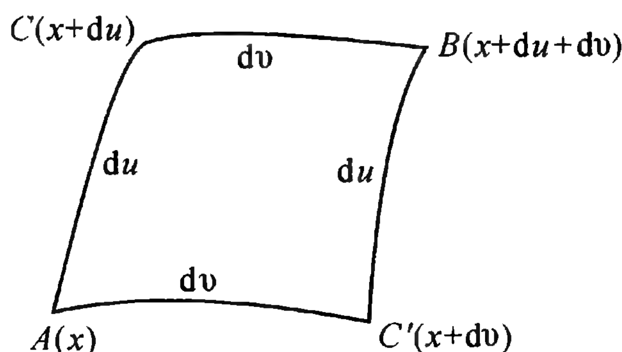


图 3.2.1

图 3.2.1 是通过 A 点的一个有坐标系的二维子流形。A,C,C',B 四点的坐标分别是(x),$(x+\mathrm{d}u)$,$(x+\mathrm{d}v)$,$(x+\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)$。$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 都是常数。在 $A(x)$点取切向量 $a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,利用(3.1.16)式,协变迁移:

$$A\to C: a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\to a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\mathrm{d}u^i\nabla_i(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})$$

$$C\to B: a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\mathrm{d}u^i\nabla_i(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})\to$$

$$a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\mathrm{d}u^i\nabla_i(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})+\mathrm{d}v^j\nabla_j(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})+\mathrm{d}v^j\mathrm{d}u^i\nabla_j\nabla_i(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})$$

协变迁移:

$$A\to C': a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\to a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\mathrm{d}v^j\nabla_j(a^k\frac{\partial}{\partial x^k})$$

$$C' \to B:\ a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathrm{d}v^j \nabla_j \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \to$$

$$a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathrm{d}v^j \nabla_j \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \mathrm{d}u^i \nabla_i \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$+ \mathrm{d}u^i \mathrm{d}v^j \nabla_i \nabla_j \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

所以 ACB 迁移－$AC'B$ 迁移

$$= \mathrm{d}u^i \mathrm{d}v^j \left[(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \tag{3.2.2}$$

从(3.1.9)式和(3.1.11)式得知，在作 ∇ 协变微分时，必须按照统一的规则，以保持运算的自洽。就是说，对于每一个上标，应该多出一个$(-\Gamma)$项；对于每一个下标，应该多出一个$(+\Gamma)$项；对于上下相同的指标求和，则不加 Γ 项。例如：

$$\nabla (A^a_b B^b_c) = \frac{\partial}{\partial x^i}(A^a_b B^b_c)\mathrm{d}x^i - \Gamma^a_{id}(A^d_b B^b_c)\mathrm{d}x^i + \Gamma^d_{ic}(A^a_b B^b_d)\mathrm{d}x^i$$

所以
$$\nabla_i (A^a_b B^b_c) = \frac{\partial}{\partial x^i}(A^a_b B^b_c) - \Gamma^a_{id}(A^d_b B^b_c) + \Gamma^d_{ic}(A^a_b B^b_d) \tag{3.2.3}$$

按照这个规则，我们来计算 $\nabla_i \nabla_j \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \nabla_j \nabla_i \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$：

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j a^k \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_i (\nabla_j a^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_i a^k \nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= (\nabla_i \nabla_j a^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + (\nabla_j a^k)\left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&\quad + (\nabla_i a^k)(\nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k}) + a^k (\nabla_i \nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_j \nabla_i a^k \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_j (\nabla_i a^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_j a^k \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= (\nabla_j \nabla_i a^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + (\nabla_i a^k)\left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&\quad + (\nabla_j a^k)(\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k}) + a^k (\nabla_j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k})
\end{aligned}$$

所以 $(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)a^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}=((\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)a^k)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$

$$+a^k((\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\frac{\partial}{\partial x^k}) \tag{3.2.4}$$

$$\nabla_j\frac{\partial}{\partial x^k}=\langle\nabla\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=\langle\Gamma^a_{qk}\mathrm{d}x^q\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=\Gamma^a_{jk}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j\frac{\partial}{\partial x^k}&=\langle\nabla\Gamma^a_{jk}\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\&=\langle\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^q}\mathrm{d}x^q\frac{\partial}{\partial x^a}+\Gamma^a_{jk}\Gamma^b_{qa}\frac{\partial}{\partial x^b}\mathrm{d}x^q,\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\&=\left(\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i}+\Gamma^b_{jk}\Gamma^a_{ib}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}\end{aligned}$$

所以 $(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$

$$=\left(\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^j}+\Gamma^b_{jk}\Gamma^a_{ib}-\Gamma^b_{ik}\Gamma^a_{jb}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

$$=R^a_{kij}\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{3.2.5}$$

$$R^a_{kij}=\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^a_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^b_{jk}\Gamma^a_{ib}-\Gamma^b_{ik}\Gamma^a_{jb} \tag{3.2.6}$$

R^a_{kij} **称为曲率张量**。

再计算$(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)a^k$：

$$\nabla_j a^k=\frac{\partial a^k}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j a^k&=\langle\nabla\frac{\partial a^k}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\&=\langle\frac{\partial^2a^k}{\partial x^q\partial x^j}\mathrm{d}x^q+\Gamma^m_{qj}\mathrm{d}x^q\frac{\partial a^k}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\\&=\frac{\partial^2a^k}{\partial x^i\partial x^j}+\Gamma^m_{ij}\frac{\partial a^k}{\partial x^m}\end{aligned}$$

$$=\frac{\partial^2 a^k}{\partial x^i \partial x^j}+\Gamma_{ij}^m \nabla_m a^k$$

所以 $(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)a^k = (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m)\nabla_m a^k$

$$=(\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m)\frac{\partial a^k}{\partial x^m}=T_{ji}^m\frac{\partial a^k}{\partial x^m} \tag{3.2.7}$$

$$T_{ij}^m=\Gamma_{ji}^m-\Gamma_{ij}^m \tag{3.2.8}$$

T_{ij}^m称为**挠率张量**。

于是(3.2.4)式应该写成

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)a^k \frac{\partial}{\partial x^k}=(T_{ji}^m\frac{\partial a^k}{\partial x^m}+a^q R_{qij}^k)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.2.9}$$

可见曲率张量 R_{qij}^k 和挠率张量 T_{ij}^m 不等于 0 时,$a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$经过 ACB 协变迁移和经过 $AC'B$ 协变迁移所得的结果是不相同的。反之,如果曲率张量和挠率张量都等于 0,则两条不同路径协变迁移的结果相同。

以下再考察一个推广的情况。

我们把$\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}$推广成为 $e_a=e_a^i\frac{\partial}{\partial x^i}, e_b=e_b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$;把$[\nabla_i,\nabla_j]$推广成为$[\nabla_{e_a},\nabla_{e_b}]$。其主要区别在于$\frac{\partial}{\partial x^i}$与$\frac{\partial}{\partial x^j}$是可对易的,$e_a$ 与 e_b 是不可对易的。

同时,从 $e_a^i\frac{\partial}{\partial x^i}=e_a$ 还可看到,e_a^i 其实是$\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\cdots$与 $e_a,e_b,\cdots$ 两种基矢之间的转换矩阵。例如,应该有如下一类的转换关系:

$$e_b^i\Gamma_{im}^q=\Gamma_{bm}^q \tag{3.2.10}$$

所以利用前面用过的办法:

$$\nabla_{e_b}e_c=\langle\nabla e_c,e_b\rangle=\langle \mathrm{d}x^i\Gamma_{ic}^m e_m, e_b{}^j\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle$$

$$=e_b{}^i\Gamma_{ic}^m e_m=\Gamma_{bc}^m e_m \tag{3.2.11}$$

$$\nabla_{e_a}\nabla_{e_b}e_c=\langle\nabla\Gamma_{bc}^m e_m,e_a\rangle$$

$$=\langle \mathrm{d}x^i \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} e_m + \Gamma^m_{bc} \nabla e_m, e^j_a \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$$

$$=\left(e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} e_m + \langle \Gamma^m_{bc} \Gamma^k_{im} \mathrm{d}x^i e_k, e^j_a \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \right)$$

$$=e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} e_m + \Gamma^m_{bc} \Gamma^k_{im} e_k e^i_a$$

$$=e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} e_m + \Gamma^m_{bc} \Gamma^k_{am} e_k$$

$$=\left(e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} + \Gamma^n_{bc} \Gamma^m_{an} \right) e_m \tag{3.2.12}$$

由(3.2.12)式立刻得

$$(\nabla_{e_a} \nabla_{e_b} - \nabla_{e_b} \nabla_{e_a}) e_c =$$

$$\left(e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} - e^i_b \frac{\partial \Gamma^m_{ac}}{\partial x^i} + \Gamma^f_{bc} \Gamma^m_{af} - \Gamma^f_{ac} \Gamma^m_{bf} \right) e_m \tag{3.2.13}$$

但因为$[e_b, e_c] \neq 0$,使得$[\nabla_{e_a}, \nabla_{e_b}]$并非线性微分算子。改正的办法是取

$$R(e_a, e_b) = [\nabla_{e_a}, \nabla_{e_b}] - \nabla_{[e_a, e_b]} \text{①} \tag{3.2.14}$$

$$\nabla_{[e_a, e_b]} e_c = \langle \nabla e_c, f^d_{ab} e_d \rangle = \langle \mathrm{d}x^i \Gamma^m_{ic} e_m, f^d_{ab} e^k_d \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle$$

$$= f^d_{ab} e^i_d \Gamma^m_{ic} e_m = f^d_{ab} \Gamma^m_{dc} e_m \tag{3.2.15}$$

所以 $R(e_a, e_b) e_c = ([\nabla_{e_a}, \nabla_{e_b}] - \nabla_{[e_a, e_b]}) e_c = R^m_{cab} e_m$

$$= \left(e^i_a \frac{\partial \Gamma^m_{bc}}{\partial x^i} - e^i_b \frac{\partial \Gamma^m_{ac}}{\partial x^i} + \Gamma^f_{bc} \Gamma^m_{af} - \Gamma^f_{ac} \Gamma^m_{bf} - f^d_{ab} \Gamma^m_{dc} \right) e_m \tag{3.2.16}$$

当取局部坐标自然标架时,$e^k_a = \delta^k_a$,$f^d_{ab} = 0$,(3.2.16)式就回到(3.2.6)式,与(3.2.14)式类似,$T(e_a, e_b)$应该是

$$T(e_a, e_b) = \nabla_{e_a} e_b - \nabla_{e_b} e_a - [e_a, e_b] = T^c_{ab} e_c \tag{3.2.17}$$

---

① $[e_a, e_b] = \left(e^i_a \frac{\partial e^j_b}{\partial x^i} - e^i_b \frac{\partial e^j_a}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = f^j_{ab} \frac{\partial}{\partial x^j}$

§3.3 曲率张量和挠率张量的结构方程和可积条件

从(3.2.6)式看到，R^q_{kij} 对 i,j 是反对称的，所以可定义曲率 2-形式：

$$\Omega^q_k \equiv \frac{1}{2} R^q_{kij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \tag{3.3.1$_1$}$$

$(\mathrm{d}x^i)$ 与 $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 对偶，$\langle \mathrm{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta^i_j$。

从(3.2.16)式又看到，R^m_{cab} 对 a,b 也是反对称的，所以又可定义推广的曲率 2-形式：

$$\Omega^a_b \equiv \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d \tag{3.3.1$_2$}$$

θ^a 与 e_b 对偶，$\langle \theta^a, e_b \rangle = \delta^a_b$。两种对偶是自洽的，因为 $\theta^a = e^a_j \mathrm{d}x^j$，$e_b = e^i_b \frac{\partial}{\partial x^i}$，从而

$$\langle \theta^a, e_b \rangle = e^a_j e_b{}^i \delta^j_i = e^a_i e^i_b = \delta^b_a$$

现在定义

$$w_b{}^a = \theta^d \Gamma^a_{db} \tag{3.3.2}$$

则有

$$\mathrm{d}w^a_b = \mathrm{d}(\theta^c \Gamma^a_{cb}) = (\mathrm{d}\theta^c) \Gamma^a_{cb} - \theta^c \wedge \mathrm{d}\Gamma^a_{cb}$$

其中

$$\mathrm{d}\theta^c = \mathrm{d}(e^c_j \mathrm{d}x^j) = \mathrm{d}e^c_j \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{\partial e^c_j}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

由于

$$\mathrm{d}x^i = e^i_a \theta^a, \quad \mathrm{d}x^j = e_b{}^j \theta^b,$$

所以

$$\mathrm{d}\theta^c = \frac{\partial e_j{}^c}{\partial x^i} e^i_a e^j_b \theta^a \wedge \theta^b$$

又由于

$$e_j{}^c e^j_b = \delta^c_b$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^c &= -e^i_a e^c_j \frac{\partial e^j_b}{\partial x^i} \theta^a \wedge \theta^b \\ &= -e^c_j e^i_a \frac{\partial e^j_b}{\partial x^i} \theta^a \wedge \theta^b \\ &= -e^c_j \frac{1}{2}\left(e^i_a \frac{\partial e^j_b}{\partial x^i} - e^i_b \frac{\partial e^j_a}{\partial x^i}\right)\theta^a \wedge \theta^b \\ &= -\frac{1}{2} f^c_{ab} \theta^a \wedge \theta^b \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

另外有

$$\mathrm{d}\Gamma^a_{cb} = \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i = \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^i} e^i_d \theta^d \rightarrow \theta^c \wedge \mathrm{d}\Gamma^a_{cb} = \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^i} e^i_d \theta^c \wedge \theta^d \tag{3.3.4}$$

代入 $\mathrm{d}w^a_b$，得

$$\mathrm{d}w^a_b = \left(-\frac{1}{2} f^c_{de} \theta^d \wedge \theta^e\right)\Gamma^a_{cb} - \frac{\partial \Gamma^a_{db}}{\partial x^i} e^i_e \theta^d \wedge \theta^e \tag{3.3.5}$$

然后定义

$$\Omega^a_b \equiv \mathrm{d}w^a_b + w^a_c \wedge w^c_b \tag{3.3.6}$$

就得

$$\begin{aligned}\Omega^a_b &\equiv \left(-\frac{1}{2} f^c_{de} \Gamma^a_{cb} - \frac{\partial \Gamma^a_{db}}{\partial x^i} e^i_e\right)\theta^d \wedge \theta^e + \Gamma^a_{dc}\Gamma^c_{eb}\theta^d \wedge \theta^e \\ &= \frac{1}{2}\left(e^i_d \frac{\partial \Gamma^a_{eb}}{\partial x^i} - e^i_e \frac{\partial \Gamma^a_{db}}{\partial x^i} + \Gamma^a_{dc}\Gamma^c_{eb} - \Gamma^a_{ec}\Gamma^c_{db} - f^c_{de}\Gamma^a_{cb}\right)\theta^d \wedge \theta^e \\ &= \frac{1}{2} R^a_{bde} \theta^d \wedge \theta^e \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

(3.3.7)式和(3.3.6)式称为**曲率结构方程**。

从(3.2.8)式又看到，T^m_{ij} 也是 i,j 反对称的，所以又可定义挠率

2-形式：

$$\tau^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \tag{3.3.8}$$

再把(3.2.17)式的 $T(e_a, e_b)$算出来：

$$\begin{aligned} T(e_a, e_b) &= \langle \nabla e_b, e_a \rangle - \langle \nabla e_a, e_b \rangle - f^c_{ab} e_c \\ &= \langle \theta^d \Gamma^c_{db} e_c, e_a \rangle - \langle \theta^d \Gamma^c_{da} e_c, e_b \rangle - f^c_{ab} e_c \\ &= (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - f^c_{ab}) e_c = T^c_{ab} e_c \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

所以 $$T^c_{ab} = (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - f^c_{ab}) \tag{3.3.10}$$

就又得到推广的挠率 2-形式：

$$\tau^a = \frac{1}{2} T^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c = \frac{1}{2} (\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} - f^a_{bc}) \theta^b \wedge \theta^c \tag{3.3.11}$$

再自(3.3.3)式和(3.3.2)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta^a + w^a_b \wedge \theta^b &= -\frac{1}{2} f^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c + \theta^b \Gamma^a_{bc} \wedge \theta^c \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} - \frac{1}{2} f^a_{bc}) \theta^b \wedge \theta^c \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

就又得

$$\tau^a \equiv \mathrm{d}\theta^a + w^a_b \wedge \theta^b \tag{3.3.13}$$

(3.3.12)式和(3.3.13)式称为**挠率结构方程**。

对推广的曲率 2-形式((3.3.1)$_2$ 式)微分，并利用(3.3.6)式：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega^a_b &= \mathrm{d}w^a_c \wedge w^c_b - w^a_c \wedge \mathrm{d}w^c_b \\ &= (\Omega^a_c - w^a_d \wedge w^d_c) \wedge w^c_b - w^a_c \wedge (\Omega^c_b - w^c_d \wedge w^d_b) \\ &= \Omega^a_c \wedge w^c_b - w^a_c \wedge \Omega^c_b - w^a_d \wedge w^d_c \wedge w^c_b \\ &\quad + w^a_c \wedge w^c_d \wedge w^d_b \end{aligned}$$

所以 $$\mathrm{d}\Omega^a_b = \Omega^a_c \wedge w^c_b - w^a_c \wedge \Omega^c_b \tag{3.3.14}$$

(3.3.14)式称为**曲率的可积条件**。

对推广的挠率 2-形式((3.3.13)式)微分，也利用(3.3.6)式：

$$\mathrm{d}\tau^a = \mathrm{d}w^a_b \wedge \theta^b - w^a_c \wedge \mathrm{d}\theta^c$$

$$=(\Omega^a_b - w^a_d \wedge w^d_b)\wedge\theta^b - w^a_c \wedge \mathrm{d}\theta^c$$

$$=\Omega^a_b \wedge \theta^b - w^a_c \wedge (w^c_b \wedge \theta^b + \mathrm{d}\theta^c)$$

再利用(3.3.13)式，得

$$\mathrm{d}\tau^a = \Omega^a_b \wedge \theta^b - w^a_c \wedge \tau^c$$

所以

$$\mathrm{d}\tau^a + w^a_c \wedge \tau^c = \Omega^a_b \wedge \theta^b \tag{3.3.15}$$

(3.3.15)式称为**挠率的可积条件**。

§3.4　Hodge * 和伴随外微分

设有一个 n 维空间，其中有全反对称 p 阶张量场：

$$f_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \tag{3.4.1}$$

它是 x 的光滑函数。于是可以写出 x 点的 p 形式如下：

$$f_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \tag{3.4.2}$$

由于从 n 个各不相同的 $\mathrm{d}x^i$ 中取出 p 个各不相同的 $\mathrm{d}x^i$ 的方法有 $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}$ 种，所以这种 p 形式的维数必定是：

$$\frac{1}{p!}n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

同样的道理，n 维空间中 $(n-p)$ 形式的维数必定是：

$$\frac{1}{(n-p)!}n(n-1)(n-2)\cdots(p+1) = \frac{n!}{(n-p)!\ p!}$$

两者维数相同，所以 p 形式和 $(n-p)$ 形式之间应存在一种对偶关系。这种对偶关系可以用 Hodge * 算子表达如下：

$$*(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\quad\quad\quad i_{p+1} \cdots i_n}\,\mathrm{d}x^{i_{p+1}} \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+2}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} \tag{3.4.3}$$

其中 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\quad\quad\quad i_{p+1}\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n}$ 是全反对称 n 维张量①

当 $p=0$,则有

$$*1=\frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n} \tag{3.4.4}$$

若任意取 r 形式 α_r 为

$$\alpha_r=\frac{1}{r!}f_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} \tag*{(3.4.5)$_1$}$$

则有

$$\begin{aligned}*\alpha_r&=\frac{1}{r!}f_{i_1\cdots i_r}*(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r})\\&=\frac{1}{r!}f_{i_1\cdots i_r}\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{\quad\quad i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\\&\quad\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\end{aligned} \tag*{(3.4.5)$_2$}$$

再设另有一个 r 形式 β_r 为

$$\beta_r=\frac{1}{r!}h_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} \tag*{(3.4.6)$_1$}$$

则又有

$$\begin{aligned}*\beta_r&=\frac{1}{r!}h_{i_1\cdots i_r}*(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r})\\&=\frac{1}{r!}h_{i_1\cdots i_r}\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{\quad\quad i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\\&\quad\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\end{aligned} \tag*{(3.4.6)$_2$}$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha_r\wedge*\beta_r=&\frac{1}{r!}f_{i_1\cdots i_r}\frac{1}{r!}h_{j_1\cdots j_r}\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{j_1\cdots j_r}_{\quad\quad j_{r+1}\cdots j_n}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\\&\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\end{aligned}$$

---

① $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\quad\quad\quad i_{p+1}\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n}$ 的全反对称张量性质也通用于式(3.4.5)$_2$,(3.4.6)$_2$,(3.4.7)。

$$\beta_r \wedge * \alpha_r = \frac{1}{r!} h_{j_1 \cdots j_r} \frac{1}{r!} f_{i_1 \cdots i_r} \frac{1}{(n-r)!} \varepsilon^{i_1 \cdots i_r}_{i_{r+1} \cdots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots$$
$$\wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+2}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

所以　$$\alpha_r \wedge * \beta_r = \beta_r \wedge * \alpha_r \tag{3.4.7}$$

定义 α_p 和 β_p 的内积为

$$(\alpha_p, \beta_p) = \int_M \alpha_p \wedge * \beta_p \tag{3.4.8}$$

由(3.4.7)式得知

$$(\alpha_p, \beta_p) = (\beta_p, \alpha_p) \tag{3.4.9}$$

我们现在引入**伴随外微分算子** δ。

定义　$$\delta = (-1)^{np+n+1} * \mathrm{d} * \Leftrightarrow \delta\alpha_p = (-1)^{np+n+1} * \mathrm{d} * \alpha_p \tag{3.4.10}$$

当 n=偶数，$\delta = - * \mathrm{d} *$

当 n=奇数，$\delta = (-1)^p * \mathrm{d} *$

为了便于后面的计算，我们先把 $* * \alpha_r$ 和 $\delta\alpha_r$ 算出来：

(1) $$* * \alpha_r = * \frac{1}{r!} \frac{1}{(n-r)!} f_{i_1 \cdots i_r} \varepsilon^{i_1 \cdots i_r}_{i_{r+1} \cdots i_n} \mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+2}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

（这里利用了$(3.4.5)_2$式）

$$= \frac{1}{r!} f_{i_1 \cdots i_r} \frac{1}{(n-r)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{i_{r+1} \cdots i_n} * \mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

$$= \frac{1}{r!} f_{i_1 \cdots i_r} \frac{1}{(n-r)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{i_{r+1} \cdots i_n} \frac{1}{r!} \varepsilon^{i_{r+1} \cdots i_n}_{k_1 \cdots k_r} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_r}$$

$$= \frac{1}{r!} \frac{1}{r!} \frac{1}{(n-r)!} f_{i_1 \cdots i_r} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{i_{r+1} \cdots i_n} (-1)^{r(n-r)} \cdot \varepsilon_{k_1 \cdots k_r}{}^{i_{r+1} \cdots i_n} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\frac{1}{r!}\frac{1}{(n-r)!}f_{i_1\cdots i_r}(-1)^{r(n-r)}(n-r)!$$

$$\cdot\delta^{i_1 i_2\cdots i_r}_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\frac{1}{r!}\frac{1}{(n-r)!}f_{i_1\cdots i_r}(-1)^{r(n-r)}(n-r)!$$

$$\cdot r!\ \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}(-1)^{r(n-r)}f_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=(-1)^{r(n-r)}\alpha_r=\begin{cases}+\alpha_r & n\text{ 奇}\\(-1)^r\alpha_r & n\text{ 偶}\end{cases}\qquad(3.4.11)$$

(2) $\delta\alpha_r=(-1)^{nr+n+1}*\mathrm{d}*\alpha_r$。由(3.4.5)$_2$式和 $\mathrm{d}f_{i_1\cdots i_r}=f_{i_1\cdots i_r;k}\mathrm{d}x^k$ 得

$$\mathrm{d}*\alpha_r=\frac{1}{r!}f_{i_1\cdots i_r;k}\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^k$$

$$\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}$$

$$*\mathrm{d}*\alpha_r=\frac{1}{r!\ (n-r)!}f_{i_1 i_2\cdots i_r;k}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}*\mathrm{d}x^k$$

$$\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}$$

$$=\frac{1}{r!\ (n-r)!}f_{i_1\cdots i_r;k}\varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}$$

$$\cdot\frac{1}{(n-(n-r+1))!}\varepsilon_{k\underbrace{i_{r+1}\cdots i_n}_{n-r\text{个}}\underbrace{k_1 k_2\cdots k_{r-1}}_{r-1\text{个}}}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge$$

$$\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$=\frac{1}{r!\ (n-r)!\ (r-1)!}f_{i_1\cdots i_r;k}\varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}$$

$$\cdot(-1)^{(r-1)(n-r)}\varepsilon_{kk_1k_2\cdots k_{r-1}i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$=\frac{1}{r!\ (n-r)!\ (r-1)!}f_{i_1\cdots i_r;k}(-1)^{(r-1)(n-r)}$$

$$\cdot\ \delta^{i_1 i_2 \cdots i_r i_{r+1} \cdots i_n}_{k k_1 \cdots k_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$= \frac{1}{r!\ (n-r)!\ (r-1)!} f_{i_1 \cdots i_r ; k} (-1)^{(r-1)(n-r)}$$

$$\cdot\ (n-r)!\ \delta^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{k k_1 \cdots k_{r-1}} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$= \frac{1}{r!\ (r-1)!} f_{i_1 \cdots i_r ; k} (-1)^{(r-1)(n-r)} \delta^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{k k_1 \cdots k_{r-1}} \mathrm{d}x^{k_1}$$

$$\wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$\delta\alpha_r = (-1)^{nr+n+1} * \mathrm{d} * \alpha_r$$

$$= \frac{1}{r!\ (r-1)!} (-1)^{nr+n+1+(r-1)(n-r)}$$

$$\cdot\ f_{i_1 \cdots i_r ; k} \delta^{i_1 \cdots i_r}_{k k_1 \cdots k_{r-1}} \cdot \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{r-1}}$$

$$= -\frac{1}{r!\ (r-1)!} f_{i_1 \cdots i_r ; k} \delta^{i_1 \cdots i_r}_{k k_1 \cdots k_{r-1}} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \mathrm{d}x^{k_2}$$

$$\wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{r-1}} \tag{3.4.12}$$

($nr+n+1+(r-1)(n-r)=2nr+1+r(1-r)=$奇数)

下面择要列举出 δ 的一些特殊性质。

(1) $(\alpha_r, \mathrm{d}\beta_{r-1}) = (\delta\alpha_r, \beta_{r-1})$　　(3.4.13)

证明　从(3.4.12)式得知 $\delta\alpha_r$ 是 $r-1$ 形式，可以利用(3.4.9)式：

$$(\delta\alpha_r, \beta_{r-1}) = (\beta_{r-1}, \delta\alpha_r) = \int_M \beta_{r-1} \wedge * \delta\alpha_r$$

又由于(3.4.10)式：

$$\delta\alpha_r = (-1)^{nr+n+1} * \mathrm{d} * \alpha_r$$

所以 $(\delta\alpha_r, \beta_{r-1}) = \int_M \beta_{r-1} \wedge (-1)^{nr+n+1} * * \mathrm{d} * \alpha_r$

$\mathrm{d} * \alpha_r$ 是一个$(n-r+1)$的形式。根据(3.4.11)式得

$$(\delta\alpha_r, \beta_{r-1}) = \int_M \beta_{r-1} \wedge (-1)^{nr+n+1} \cdot (-1)^{(n-r+1)(r-1)} \mathrm{d} * \alpha_r$$

$$=(-1)^{-r^2+2r}\int_M \beta_{r-1}\wedge \mathrm{d}*\alpha_r \tag{3.4.14}$$

把 $*\alpha_r$ 记作 $a_{n-r}=a_{j_1j_2\cdots j_{n-r}}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge \mathrm{d}x^{j_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_{n-r}}$，并又有

$\beta_{r-1}=\beta_{i_1\cdots i_{r-1}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}}$

$\mathrm{d}*\alpha_r=\mathrm{d}a_{n-r}=a_{j_1j_2\cdots j_{n-r};k}\mathrm{d}x^k\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_{n-r}}$

代入(3.4.13)式，而且取 M 为一个**没有边界**的流形，则作部分积分之后有

$$\begin{aligned}
(\delta\alpha_r,\beta_{r-1}) &= (-1)^{-r^2+2r}\int_M \beta_{i_1\cdots i_{r-1}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}} \\
&\quad \wedge a_{j_1j_2\cdots j_{n-r};k}\mathrm{d}x^k\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_{n-r}} \\
&= (-1)^{-r^2+2r}\int_M -\beta_{i_1\cdots i_{r-1};k}(-1)^{r-1}\mathrm{d}x^k \\
&\quad \wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}}\wedge a_{j_1j_2\cdots j_{n-r}}\mathrm{d}x^{j_1} \\
&\quad \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_{n-r}} \\
&= (-1)^{-r^2+r}\int_M \beta_{i_1\cdots i_{r-1};k}\mathrm{d}x^k\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots \\
&\quad \wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}}a_{j_1j_2\cdots j_{n-r}}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_{n-r}} \\
&= (-1)^{-r(r-1)}\int_M \mathrm{d}\beta_{r-1}\wedge a_{n-r} \\
&= \int_M \mathrm{d}\beta_{r-1}\wedge *\alpha_r \\
&= (\alpha_r,\mathrm{d}\beta_{r-1})
\end{aligned}$$

证毕。

(2) $$\delta^2=0 \tag{3.4.15}$$

证明 $\delta\alpha_p=(-1)^{np+n+1}*\mathrm{d}*\alpha_p$（根据式(3.4.10)），$\delta\alpha_p$ 和 $*\mathrm{d}*\alpha_p$ 都是$(p-1)$形式，

$$\begin{aligned}
\delta\cdot\delta\alpha_p &= (-1)^{n(p-1)+n+1}*\mathrm{d}*\delta\alpha_p \\
&= (-1)^{n(p-1)+n+1}*\mathrm{d}*(-1)^{np+n+1}*\mathrm{d}*\alpha_p
\end{aligned}$$

$$=(-1)^n * d * * d * \alpha_p$$

$d * \alpha_p$ 是$(n-p+1)$形式，根据(3.4.11)式得

$$* * d * \alpha_p=(-1)^{(n-p+1)(p-1)} d * \alpha_p$$

于是

$$\delta \cdot \delta\alpha_p=(-1)^n(-1)^{(n-p+1)(p-1)} * dd * \alpha_p=0 \quad (\text{因 } dd=0)$$

这个结果对任何 p 都成立，所以

$$\delta \cdot \delta=0$$

证毕。

(3) $\triangle=(d+\delta)^2=d\delta+\delta d$。 (3.4.16)

由于 $dd=0,\delta\delta=0$，所以这是显而易见的。

下面再择要列举一下△的特殊性质：

(1) $*\Delta=\Delta *$ (3.4.17)

证明 $*\Delta\alpha_p= * d\delta\alpha_p + * \delta d\alpha_p$

其中

$$\begin{aligned}
* d\delta\alpha_p &= * d(-1)^{np+n+1} * d * \alpha_p \\
&=(-1)^{np+n+1} * d * d * \alpha_p \\
* \delta d\alpha_p &=(-1)^{n(p+1)+n+1} * * d * d\alpha_p \\
&=(-1)^{n(p+1)+n+1}(-1)^{(n-p)(n-(n-p))} d * d\alpha_p \\
&=(-1)^{1-p^2} d * d\alpha_p
\end{aligned}$$

$$\Delta * \alpha_p=d\delta * \alpha_p+\delta d * \alpha_p$$

其中

$$\begin{aligned}
\delta d * \alpha_p &=(-1)^{n(n-p+1)+n+1} * d * d * \alpha_p \\
&=(-1)^{np+n+1} * d * d * \alpha_p \\
d\delta * \alpha_p &=d * d * (-1)^{n(n-p)+n+1} * \alpha_p \\
&=d * d(-1)^{n(n-p)+n+1} * * \alpha_p \\
&=d * (-1)^{n(n-p)+n+1} d(-1)^{p(n-p)} \alpha_p \\
&=(-1)^{1-p^2} d * d\alpha_p
\end{aligned}$$

所以$(*\mathrm{d}\delta+*\delta\mathrm{d})\alpha_p=(\mathrm{d}\delta*+\delta\mathrm{d}*)\alpha_p$

对任何 p 都成立。

所以$*\Delta\alpha_p=\Delta*\alpha_p$

对任何 α_p 都成立。从而得

$$*\Delta=\Delta*$$

证毕。

(2) $(\alpha_r,\Delta\beta_r)=(\Delta\alpha_r,\beta_r)$ (3.4.18)

证明 根据(3.4.16)式，

$$(\alpha_r,\Delta\beta_r)=(\alpha_r,\mathrm{d}\delta\beta_r)+(\alpha_r,\delta\mathrm{d}\beta_r)$$

利用(3.4.13)式和(3.4.9)式，有

$$\begin{aligned}(\alpha_r,\Delta\beta_r)&=(\delta\alpha_r,\delta\beta_r)+(\mathrm{d}\alpha_r,\mathrm{d}\beta_r)\\&=(\mathrm{d}\delta\alpha_r,\beta_r)+(\delta\mathrm{d}\alpha_r,\beta_r)\\&=(\Delta\alpha_r,\beta_r)\end{aligned}$$

证毕。

(3) $(\alpha_r,\Delta\alpha_r)\geqslant 0$ (3.4.19)$_1$

证明 根据(3.4.18)式得

$$\begin{aligned}(\alpha_{r_1},\Delta\alpha_r)&=(\mathrm{d}\alpha_r,\mathrm{d}\alpha_r)+(\delta\alpha_r,\delta\alpha_r)\\&=\int\mathrm{d}\alpha_r\wedge*\mathrm{d}\alpha_r+\int\delta\alpha_r\wedge*\delta\alpha_r\end{aligned}\qquad(3.4.19)_2$$

又根据(3.4.6)$_1$,(3.4.6)$_2$ 式，得

$$\gamma_r=\frac{1}{r!}g_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$*\gamma_r=\frac{1}{r!}g_{i_1\cdots i_r}\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{\quad i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}$$

所以 $\gamma_r\wedge*\gamma_r=\left(\frac{1}{r!}\right)^2\frac{1}{(n-r)!}(g_{i_1\cdots i_r})^2\varepsilon_{i_1\cdots i_r i_{r-1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots$

$$\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\wedge\mathrm{d}x^{i_{r-1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}$$

根据(1.4.13)式，又得

$$\gamma_r\wedge*\gamma_r=\left(\frac{1}{r!}\right)^2\frac{1}{(n-r)!}(g_{i_1\cdots i_r})^2n!\cdot(n\text{ 维体积元})$$

$$\geqslant 0 \tag{3.4.20}$$

所以 $(3.4.19)_2$ 式中的 $\int d\alpha_r * d\alpha_r$ 和 $\int \delta\alpha_r \wedge * \delta\alpha_r$ 都 $\geqslant 0$。

所以 $(\alpha_r, \Delta\alpha_r) \geqslant 0$ 证毕。

从 $(3.4.19)_2$ 式还可以看到，若 $\Delta\alpha_r = 0$，则必 $d\alpha_r = \delta\alpha_r = 0$。于是又给出一组定义：

$\Delta w_p = 0$，w_p 是一个调和形式（$dw_p = \delta w_p = 0$）。

$dw_p = 0$，w_p 是一个闭形式。

$\delta w_p = 0$，w_p 是一个余闭形式。

另外还有：

$\alpha = d\beta$，α 是恰当形式。

$\alpha = \delta\beta$，α 是余恰当形式。

Hodge 分解定理 紧致无边界流形 M 上的任意一个 p-形式 w_p 可以唯一地分解成为恰当形式，余恰当形式和调和形式之和（这里略去唯一性的证明）：

$$w_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p \tag{3.4.21}$$

上式中 γ_p 就是一个调和形式，w_p 的各种主要性质都包含在 γ_p 之中，而且 $d\alpha_{p-1}$，$\delta\beta_{p+1}$ 和 γ 互相正交。正交性证明如下。

证明 根据(3.4.13)式和 γ 是调和形式（$d\gamma = \delta\gamma = 0$），有

$$(d\alpha_{p-1}, \delta\beta_{p+1}) = (dd\alpha_{p-1}, \beta_{p+1}) = (\alpha_{p-1}, \delta\delta\beta_{p+1}) = 0$$

由于 $\delta\gamma = d\gamma = 0$，所以

$$(\alpha_{p-1}, \delta\gamma) = (d\alpha_{p-1}, \gamma) = 0$$

$$(\beta_{p+1}, d\gamma) = (\delta\beta_{p+1}, \gamma) = 0$$

证毕。

第4章 黎曼几何

§4.1 黎曼度量

在黎曼几何中，n 维流形上邻近两点的距离的平方是

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\cdot\mathrm{d}x^j \quad (g_{ij}(x)=g_{ji}(x)) \tag{4.1.1}$$

式中的 $g_{ij}(x)$ 称为黎曼度量，它是一个处处可微分的张量场，而且 $\det|g_{ij}|\neq 0$。

具备黎曼度量的流形又称为黎曼流形，在 n 维黎曼流形 M 上的任意一个 P 点，也有一个切空间 $T_P(M)$。其中的任意两个切向量 $X_P=\xi^i\partial_i$ 和 $Y_P=\eta^j\partial_j$ 的标积是

$$X_P\cdot Y_P=g_{ij}(P)\xi^i(P)\eta^j(P) \tag{4.1.2}$$

由此得到切向量的长度为

$$|X_P|=\sqrt{X_P\cdot X_P}$$
$$=\sqrt{g_{ij}(P)\xi^i(P)\xi^j(P)} \tag{4.1.3}$$

P 点的两个切向量 X_P 和 Y_P 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{X_P\cdot Y_P}{\sqrt{|X_P|\cdot|Y_P|}} \tag{4.1.4}$$

在黎曼流形上建立的 Hodge * 运算含有 $g_{\mu\gamma}$。例如，第3章(3.4.3)式在有黎曼度量时应写成

$$*\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}=\frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}$$

$$\wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \tag{4.1.5}$$

其中

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n} = g^{i_1k_1}g^{i_2k_2}\cdots g^{i_rk_r}\cdot\varepsilon_{k_1k_2\cdots k_ri_{r+1}\cdots i_n} \tag{4.1.6}$$

这样，就出现了上下指标，以便于进行上下相同指标的短缩，也便于把下指标提升为上指标。

为了确立 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ 与 $\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}$ 之间的关系，我们利用$(1.4.3)_2$ 式

$$\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} = \begin{vmatrix} \delta^1_{i_1} & \delta^1_{i_2} & \cdots & \delta^1_{i_n} \\ \delta^2_{i_1} & \delta^2_{i_2} & \cdots & \delta^2_{i_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta^n_{i_1} & \delta^n_{i_2} & \cdots & \delta^n_{i_n} \end{vmatrix} \tag{4.1.7}$$

并且令

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n} = \gamma\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} \tag{4.1.8}$$

于是，由于 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ 是张量，在坐标变换下应有

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} = \varepsilon'_{k_1\cdots k_n} \tag{4.1.9}$$

利用(4.1.8)式，自(4.1.9)式得

$$\gamma\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} = \gamma'\delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n} \tag{4.1.10}$$

其中

$$\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^{k_1}} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^{k_2}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^{k_n}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^{k_1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^{k_2}} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial x'^{k_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^{k_1}} & \frac{\partial x^n}{\partial x'^{k_2}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^{k_n}} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial x'^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^n}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{vmatrix} \delta^{12\cdots n}_{k_1k_2\cdots k_n} = J^{-1}\delta^{12\cdots n}_{k_1k_2\cdots k_n} \tag{4.1.11}$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \tag{4.1.12}$$

$$(J^{-1}J=JJ^{-1}=1)$$

又利用式(4.1.9),(4.1.10)和式(4.1.11),得

$$\gamma\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}}=\gamma J^{-1}\delta^{12\cdots n}_{k_1k_2\cdots k_n}=\gamma'\delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n}$$

所以 $$\gamma J^{-1}=\gamma' \quad\rightarrow\quad \frac{\gamma}{\gamma'}=J \tag{4.1.13}$$

再定义 $g=|\det(g_{ij})|$, $g'=|\det(g_{ij}{}')|$; $J=\left|\det\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)\right|$, $J^{-1}=\left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right)\right|$,则由于 $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right)\det(g_{ij})\det\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}\right)=\det(g_{kl}{}')$,得

$$J^{-1}gJ^{-1}=g'$$

所以 $$\frac{g}{g'}=J^2 \tag{4.1.14}$$

与(4.1.13)对照,得知

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=J=\sqrt{\frac{g}{g'}} \tag{4.1.15}$$

所以，取 $\gamma=\sqrt{g}$，$\gamma'=\sqrt{g'}$，就可以保证

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\sqrt{g}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} \tag{4.1.16}$$

是一个张量。进而可以利用 g_{ij} 来定义 $\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}$：

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{i_{r+1}\cdots i_n}&=g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\cdot\varepsilon_{k_1\cdots k_ri_{r+1}\cdots i_n}\\&=g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\gamma\delta^{1\cdots rr+1\cdots n}_{k_1\cdots k_ri_{r+1}\cdots i_n}\\&=g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\sqrt{g}\delta^{1\cdots rr+1\cdots n}_{k_1\cdots k_ri_{r+1}\cdots i_n}\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

于是有

$$\begin{aligned}*\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}=&\frac{1}{(n-r)!}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\sqrt{g}\\&\cdot\delta^{1\cdots rr+1\cdots n}_{k_1\cdots k_ri_{r+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

当 $r=0$

$$\begin{aligned}*\,1&=\frac{1}{n!}\sqrt{g}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\\&=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

又由于

$$\mathrm{d}x'^1\wedge\mathrm{d}x'^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x'^n=J\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

$$J=\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

所以

$$\sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'^1\wedge\mathrm{d}x'^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x'^n=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

于是得

$$\begin{aligned}*\,1&=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&=\sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'^1\wedge\mathrm{d}x'^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x'^n\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

由(4.1.16)式，又由于 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ 具有张量性质，所以我们再引入 η：

$$\varepsilon^{j_1\cdots j_n}=\eta\delta^{j_1\cdots j_n}_{1\cdots n} \tag{4.1.20}$$

仿照(4.1.11)式，可得

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\sqrt{g}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}=g_{i_1j_1}\cdots g_{i_nj_n}\varepsilon^{j_1\cdots j_n}=g_{i_1j_1}\cdots g_{i_nj_n}\eta\delta^{j_1\cdots j_n}_{1\cdots n}$$

$$=\eta\begin{vmatrix} g_{i_11} & g_{i_12} & \cdots & g_{i_1n} \\ g_{i_21} & g_{i_22} & \cdots & g_{i_2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i_n1} & g_{i_n2} & \cdots & g_{i_nn} \end{vmatrix}=\eta\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}$$

$$=\eta\det(g_{ij})\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}=\eta g\,\mathrm{sign}(g)\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} \tag{4.1.20}$$

其中 g 是 $\det(g_{ij})$ 的绝对值，$\mathrm{sign}(g)$ 是 $\det(g_{ij})$ 的±号。

如果要求(4.1.16)式成立，则得到

$$\eta=\mathrm{sign}(g)\frac{1}{\sqrt{g}} \tag{4.1.21}$$

所以
$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\mathrm{sign}(g)\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n} \tag{4.1.22}$$

于是，(4.1.16)式和(4.1.22)式就分别确定了 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$，$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ 同 $\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}$，$\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}$ 的关系。

与§3.4节相比较，在引入黎曼度规后，必定要出现 $\mathrm{sign}(g)$，例如，由式(4.1.16)和(4.1.22)得到的是

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}\varepsilon_{j_1\cdots j_n}=\mathrm{sign}(g)\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}\sqrt{g}\,\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}$$

$$=\mathrm{sign}(g)\delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} \tag{4.1.23}$$

引入黎曼度规后，式(3.4.11)变成

$$**\alpha_r=\mathrm{sign}(g)(-1)^{r(n-r)}\alpha_r$$

$$=\mathrm{sign}(g)\cdot\begin{cases}\alpha_r & n\ 奇\\ (-1)^r\alpha_r & n\ 偶\end{cases} \tag{4.1.24}$$

伴随外微分算子 δ 的定义，由式(3.4.10)变成

$$\delta\alpha_r=\mathrm{sign}(g)(-)^{nr+n+1}*d*\alpha_r \tag{4.1.25}$$

δ 的一些特殊性质保持不变，例如

$$(\alpha_r, d\beta_{r-1}) = (\delta\alpha_r, \beta_{r-1}) \tag{4.1.26$_1$}$$

$$\delta^2 = 0 \tag{4.1.26$_2$}$$

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d \tag{4.1.26$_3$}$$

都保持不变；Δ 的一些性质，例如

$$* \Delta = \Delta * \tag{4.1.27}$$

$$(\alpha_r, \Delta\beta_r) = (\Delta\alpha_r, \beta_r)$$

$$(\alpha_r, \Delta\alpha_r) = 0$$

也都保持不变。证明的步骤与 § 3.4 节相同。

§ 4.2 Levi-Civita 平行输运、黎曼联络、曲率张量

由前述知，在光滑的 n 维流形上，可定义处处可微分的黎曼度规张量场 $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$。利用 $g_{ij}(x)$ 可把过 x 点的无穷小弧长元素 ds 的平方表达为

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{4.2.1}$$

Levi-Civita 平行输运的最主要内容就是要求

$$\begin{aligned} \nabla ds^2 &= 0 = \nabla (g_{ij} dx^i dx^j) \\ &= dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il} \right) dx^i dx^j \\ &= g_{ij,k} dx^k dx^i dx^j \end{aligned}$$

导致

$$g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{li} = 0 \tag{4.2.2}$$

就是说，如果 ds^2 平行输运不变（即 $\nabla ds^2 = 0$），则(4.2.2)式必须成立，满足(4.2.2)式的联络 Γ^i_{jk} 称为**容许联络**。容许联络的几何意义是切矢量的长度和夹角在平行输运时不变。例如，设有两个切矢量

$A^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$和$B^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$,平行输运时分别要求

$$\nabla\left(A^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=0=(\nabla A^i(x))\frac{\partial}{\partial x^i}+A^i(x)\nabla\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=\left(\frac{\partial A^b(x)}{\partial x^a}+A^i(x)\Gamma^b_{ai}\right)\mathrm{d}x^a\ \frac{\partial}{\partial x^b}=0$$

$$\nabla\left(B^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=0=(\nabla B^j(x))\frac{\partial}{\partial x^j}+B^j(x)\nabla\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\left(\frac{\partial B^c(x)}{\mathrm{d}x^\mathrm{d}}+B^j(x)\Gamma^c_{dj}\right)\mathrm{d}x^\mathrm{d}\ \frac{\partial}{\partial x^c}=0$$

从而$A^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$和$B^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$平行输运时分别要求:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^b(x)}{\partial x^a}&=-A^i(x)\Gamma^b_{ai}(x)\\ \frac{\partial B^c(x)}{\partial x^\mathrm{d}}&=-B^j(x)\Gamma^c_{\mathrm{d}j}(x)\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

于是$(g_{ij}A^iB^j)$在平行输运时,有(利用式(4.2.3)和式(4.2.2))

$$\begin{aligned}\nabla(g_{ij}A^iB^j)&=\mathrm{d}x^k\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}A^iB^j+g_{ij}\frac{\partial A^i}{\partial x^k}B^j+g_{ij}A^i\ \frac{\partial B^i}{\partial x^k}\right)\\&=\mathrm{d}x^kA^iB^j\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{qj}\Gamma^q_{ki}-g_{iq}\Gamma^q_{kj}\right)\\&=0\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

从而得知

$$\nabla(g_{ij}A^iB^j)=\nabla(g_{ij}A^iA^j)=\nabla(g_{ij}B^iB^j)=0$$

可见,如果取容许联络,则切矢量的长度和切矢量与切矢量之间的夹角在平行输运中都是不变的,与取容许联络后 $\mathrm{d}s^2$ 的平行输运不变($\nabla\mathrm{d}s^2=\nabla(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j)=0$)相互呼应。

在取容许联络的前提下,(4.2.2)式又给出

$$\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ik}+\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}=(\Gamma^q_{ji}+\Gamma^q_{ij})g_{qk}+(\Gamma^q_{jk}-\Gamma^q_{kj})g_{qi}$$

$$+(\Gamma^q_{ik}-\Gamma^q_{ki})g_{qj}$$

在黎曼流形上，还要求挠率张量为零（见(3.2.8)式）

$$\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}=T^k_{ij}=0 \tag{4.2.5}$$

于是得

$$\Gamma^m_{ij}=\frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ik}+\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}\right) \tag*{(4.2.6)$_1$}$$

这个 Γ^m_{ij} 称为黎曼联络。把(4.2.6)$_1$ 式的 Γ^m_{ij} 代入(3.2.6)式，就得到黎曼曲率张量 $R^a_{k_{ij}}$。根据(3.2.6)式，$R^a_{k_{ij}}$ 对 i,j 反对称，所以用它可以写出黎曼几何的曲率 2-形式。这个曲率 2-形式与(3.3.1)式的形式相同，反映了在黎曼流形上的一个向量沿无限小环路平行输运后回到原处时所受的变差，这个变差来源于黎曼流形的弯曲（但黎曼流形的挠率为 0）。

以下导出黎曼曲率的几个主要关系式（或对称性）。

自式(3.2.6)，

$$R^a_{bcd}=\frac{\partial\Gamma^a_{bd}}{\partial x^c}-\frac{\partial T^a_{bc}}{\partial x^d}+\Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ce}-\Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{de} \tag*{(4.2.6)$_2$}$$

自式(4.2.6)$_1$，在黎曼流形上，Γ^a_{bc} 和 Γ_{abc} 可用 g_{ab} 和 g^{ab} 来表达：

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{abc}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}+\frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b}-\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a}\right)\\ \Gamma^d_{bc}&=g^{da}\Gamma_{abc}=\frac{1}{2}g^{da}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}+\frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b}-\frac{\partial g_{ac}}{\partial x^q}\right)=\Gamma^d_{cb}\end{aligned}\right\} \tag{4.2.7}$$

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}=\Gamma_{abc}+\Gamma_{bac} \tag{4.2.8}$$

利用式(4.2.6)$_2$，(4.2.7)，(4.2.8)，得

$$\left.\begin{aligned}R_{abcd}&=g_{ae}R^e_{bcd},\\ R_{abcd}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial x^b\partial x^c}+\frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial x^a\partial x^d}-\frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial x^a\partial x^c}-\frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial x^b\partial x^d}\right)\\ &\quad+g_{ef}(\Gamma^e_{ad}\Gamma^f_{bc}-\Gamma^e_{ac}\Gamma^f_{bd})\end{aligned}\right\} \tag{4.2.9}$$

自式(4.2.9),立刻看到有以下三个关系式:

$$R_{abcd}=-R_{bacd} \tag{4.2.10}$$

$$R_{abcd}=-R_{abdc} \tag{4.2.11}$$

$$R_{abcd}=R_{cdba} \tag{4.2.12}$$

值得一提的是:关系式(4.2.10)可以由容许联络条件式(4.2.3)导出。

根据式(4.2.3)和 $g_{ij}=g_{ji}$,容许联络条件又可写成

$$\mathrm{d}g_{ij}=\Gamma_i^q g_{qj}+\Gamma_j^q g_{qi} \tag{4.2.13}$$

$(\Gamma_j^i=\Gamma_{kj}^i\,\mathrm{d}x^k$ 是 1-形式$)$

G,Γ,Γ^T 可以用矩阵表示如下:

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \quad \Gamma=\begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & \Gamma_1^2 & \cdots & \Gamma_1^m \\ \Gamma_2^1 & \Gamma_2^2 & \cdots & \Gamma_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_m^1 & \Gamma_m^2 & \cdots & \Gamma_m^m \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^T=\begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & \Gamma_2^1 & \cdots & \Gamma_m^1 \\ \Gamma_1^2 & \Gamma_2^2 & \cdots & \Gamma_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_1^m & \Gamma_2^m & \cdots & \Gamma_m^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}g_{ij})=0 \\
&=\mathrm{d}\Gamma_i^q\cdot g_{qj}-\Gamma_i^q\wedge \mathrm{d}g_{qj}+\mathrm{d}\Gamma_j^q\cdot g_{qi}-\Gamma_j^q\wedge \mathrm{d}g_{qi} \\
&=\mathrm{d}\Gamma_i^q\cdot g_{qj}-\Gamma_i^q\wedge(\Gamma_q^k g_{kj}+\Gamma_j^k g_{kq}) \\
&\quad+\mathrm{d}\Gamma_j^q\cdot g_{qi}-\Gamma_j^q\wedge(\Gamma_q^k g_{ki}+\Gamma_i^k g_{kq}) \\
&=(\mathrm{d}\Gamma_i^k+\Gamma_q^k\wedge\Gamma_i^q)g_{kj}+(\mathrm{d}\Gamma_j^k+\Gamma_q^k\wedge\Gamma_j^q)g_{ki} \\
&\quad-\Gamma_i^q\wedge\Gamma_j^k g_{kq}-\Gamma_j^k\wedge\Gamma_i^q g_{kq} \\
&\quad(\text{由于 } \Gamma_i^q\wedge\Gamma_j^k=-\Gamma_j^k\wedge\Gamma_i^q\text{,所以这一行等于 } 0) \\
&=(\mathrm{d}\Gamma_i^k+\Gamma_q^k\wedge\Gamma_i^q)g_{kj}+(\mathrm{d}\Gamma_j^k+\Gamma_q^k\wedge\Gamma_j^q)g_{ki}=0
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

根据式(3.3.6)和 $\Gamma_j^i = w_j^i$,得

$$\Omega_i^k g_{kj} + \Omega_j^k g_{ki} = \Omega_{ji} + \Omega_{ij} = 0 \tag{4.2.15}$$

又根据式(3.3.1),有

$$\Omega_{ab} = g_{ae}\Omega_b^e = g_{ae}\frac{1}{2}R_{bcd}^e \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d = \frac{1}{2}R_{abcd}\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d$$

$$\Omega_{ba} = g_{be}\Omega_a^e = g_{be}\frac{1}{2}R_{acd}^e \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d = \frac{1}{2}R_{bacd}\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d$$

所以 $(R_{abcd} + R_{bacd}) = 0$

即关系式(4.2.10)。

另外,还有两个关系式:

$$R_{q[kij]} = R_{qkij} + R_{qijk} + R_{qjki} = 0 \tag{4.2.16}$$

证明 黎曼流形的挠率为0,即 $T_{jk}^i = 0$,所以由(3.3.8)式给出 $\tau^i = 0$。自(3.3.15)式的挠率可积条件,立刻得

$$\Omega_b^a \theta^b = 0 \rightarrow \Omega_k^q \mathrm{d}x^k = 0$$

再利用(3.3.1)式,又得

$$\Omega_k^q \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}R_{kij}^q \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k = 0$$

把 k,i,j 轮换

$$R_{kij}^q \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = 0$$

$$R_{ijk}^q \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i = 0$$

$$R_{jki}^q \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$$

相加

$$(R_{kij}^q + R_{ijk}^q + R_{jki}^q)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = 0$$

因为每一组 $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$ 都是一个独立的基,包括了 $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}x^j$, $\mathrm{d}x^k$ 的各种轮换,所以有

$$R_{[kij]}^q = R_{kij}^q + R_{ijk}^q + R_{jki}^q = 0 \rightarrow R_{q[kij]} = g_{qh}R_{[kij]}^h = 0$$

得到(4.2.16)式。

$$R_{qk[ij;m]} = 0 \tag{4.2.17}$$

证明 首先，按照第 3 章求协变导数规则（见(3.2.3)式的说明），求出 R^q_{kij} 的协变导数如下：

$$\nabla_m R^q_{kij} = \frac{\partial R^q_{kij}}{\partial x^m} + \Gamma^q_{mh} R^h_{kij} - \Gamma^h_{mk} R^q_{hij} - \Gamma^h_{mi} R^q_{khj} - \Gamma^h_{mj} R^q_{kih} \qquad (4.2.18)$$

利用式(3.3.14)，把 Ω^a_b 换成 $\frac{1}{2}R^a_{bcd}\,\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d$，把 w^a_b 换成 $\mathrm{d}x^m \Gamma^a_{mb}$，就得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega^a_b &= \frac{1}{2}\mathrm{d}R^a_{bcd}\,\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial R^a_{bcd}}{\partial x^m}\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d \\ &= \Omega^a_e \wedge w^e_b - w^a_e \wedge \Omega^e_b \\ &= \frac{1}{2}(R^a_{ecd}\Gamma^e_{mb} - R^e_{bcd}\Gamma^a_{me})\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^d\end{aligned} \qquad (4.2.19)$$

所以
$$\frac{\partial R^q_{kij}}{\partial x^m}\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = (\Gamma^h_{mk}R^q_{hij} - \Gamma^q_{mh}R^h_{kij})\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \qquad (4.2.20)$$

再把(4.2.18)式的 $\nabla_m R^q_{kij}$ 定义为

$$R^q_{kij;m} = \nabla_m R^q_{kij} \qquad (4.2.21)$$

则根据式(4.2.18)和(4.2.20)，有

$$\begin{aligned}R^q_{kij;m}\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j &= (\Gamma^h_{mk}R^q_{hij} - \Gamma^q_{mh}R^h_{kij} + \Gamma^q_{mh}R^h_{kij} \\ &\quad - \Gamma^h_{mk}R^q_{hij} - \Gamma^h_{mi}R^q_{khj} - \Gamma^h_{mj}R^q_{kih})\mathrm{d}x^m \\ &\quad \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= (-\Gamma^h_{mi}R^q_{khj} - \Gamma^h_{mj}R^q_{kih})\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^i \\ &\quad \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= 0\end{aligned} \qquad (4.2.22)$$

(4.2.22)式为零是因为 Γ^h_{mi} 对 m,i 对称，Γ^h_{mj} 对 m,j 对称。

再对 i,j,m 轮换相加，就得到

$$(R^q_{kij;m}+R^q_{kjm;i}+R^q_{kmi;j})\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=0$$

也是因为每一组 $\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$ 都是一个独立的基，所以有

$$R^q_{k[ij;m]}=R^q_{kij;m}+R^q_{kjm;i}+R^q_{kmi;j}=0\rightarrow$$

$$R_{qk[ij;m]}=g_{qh}R^h_{k[ij;m]}=0$$

得到(4.2.17)式。

通过黎曼曲率张量的缩并，还可以形成另外一些张量，主要是 Ricci 曲率张量

$$R_{kj}=R^q_{kqj} \tag{4.2.23}$$

还有 Ricci 曲率标量

$$R=g^{ij}R_{ij} \tag{4.2.24}$$

根据关系式(4.2.10)，可得

$$R_{qkij}=R_{ijqk}\quad\rightarrow\quad g^{qi}R_{qkij}=g^{qi}R_{ijqk}\quad\rightarrow\quad R^i_{kij}=R^q_{jqk}$$

所以 $$R_{kj}=R_{jk} \tag{4.2.25}$$

设在 x 点有一个切向量 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$R_{ij}(x)$是 x 点的 Ricci 曲率张量，则

$$\frac{R_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} \tag{4.2.26}$$

称为 x 点的 X 方向的 Ricci 曲率。

§4.3 两个有趣的例子

1. 测地线

设有一条曲线 $C(t)$，其上各点的坐标是 $x^i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$。$C(t)$的切向量为 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$\xi^i=\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$。令 X 沿曲线 $C(t)$由 t 平行输运到 $t+\mathrm{d}t$，则按照 Levi-Civita 平行输运的定义，切向量 X 的变化应

该是

$$
\begin{aligned}
\nabla X &= \left[\mathrm{d}x^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i \mathrm{d}x^j \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\
&= \mathrm{d}x^q \left(\frac{\partial}{\partial x^q} \xi^i + \xi^k \Gamma^i_{qk} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \mathrm{d}t \cdot \xi^q \left(\frac{\partial}{\partial x^q} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \xi^k \Gamma^i_{qk} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \mathrm{d}t \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{qk} \xi^q \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \mathrm{d}t \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{qk} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

所以，如果曲线 $C(t)$ 上任意点的切向量 X 在沿 $C(t)$ 平行输运后 $\nabla X=0$，则 $C(t)$ 上各点的 $x^i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 一定要满足如下方程：

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{qk} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.3.2}
$$

满足这个方程的 $C(t)$ 就是测地线，(4.3.2)式则称为**测地线方程**。

在欧氏空间中，$\Gamma^i_{qk}=0$，连接 P,Q 两点的(4.3.2)式的解必定是直线；在非欧空间中，(4.3.2)式的解 $C(t)$ 则称为测地线。在局部范围内，连接任意 P,Q 两点的测地线总是最短线。

自(4.3.1)式还可看到，把 X 写成 $\xi^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$，则自(4.3.1)式可得

$$
\begin{aligned}
\nabla_X X &= \langle \mathrm{d}x^q \left(\frac{\partial}{\partial x^q} \xi^i + \xi^k \Gamma^i_{qk} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \\
&= \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \xi^i + \xi^k \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} \xi^i + \Gamma^i_{jk} \xi^j \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk} \xi^j \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

所以又可把测地线定义为：如果曲线 $C(t)$ 上每一点的切向量 X 沿 $C(t)$ 平行输运后不变，则 $C(t)$ 就是测地线。

我们还注意到，(4.3.2)式中 $\Gamma^i_{qk}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$ 项只有 Γ^i_{qk} 的对称部分有贡献；Γ^i_{qk} 的反对称部分无贡献。

2. Killing 矢量

设 x 代表流形 M 上一个给定的点，坐标变换后，这个点的坐标变成 x'，于是有

$$g'_{ij}(x')=\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^q}{\partial x'^j}g_{kq}(x) \tag{4.3.4}$$

若是变换后度规的函数形式不变，即 $g'_{ij}(x')$ 作为 x' 的函数和 $g_{ij}(x)$ 作为 x 的函数有相同的函数形式，则 g'_{ij} 与 g_{ij} 应有如下关系：

$$g'_{ij}(x)=g_{ij}(x),g'_{ij}(x')=g_{ij}(x') \tag{4.3.5}$$

于是根据(4.3.4)式可得：

$$g_{ij}(x)=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^q}{\partial x^j}g'_{kq}(x')=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^q}{\partial x^j}g_{kq}(x') \tag{4.3.6}$$

由式(4.3.6)又得

$$g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^q}{\partial x^j}g_{kq}(x')\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=g_{kq}(x')\mathrm{d}x'^k\mathrm{d}x'^q \tag{4.3.7}$$

式(4.3.7)表明，变换前后的 $\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}s'^2$ 相等，所以满足(4.3.6)式关系的变换称为等距变换。

在等距变换下，切向量的长度、交角和两点之间的距离都是保持不变的。

再来考察无穷小坐标变换

$$x'^k=x^k+\varepsilon\xi^k(x),\quad |\varepsilon|\ll 1 \tag{4.3.8}$$

这个变换相当于 x 点沿着向量场 $X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的方向有一个微小的

移动。把(4.3.8)式代入(4.3.6)式，得

$$g_{ij}(x)=\left(\frac{\partial(x^k+\varepsilon\xi^k(x))}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial(x^q+\varepsilon\xi^q(x))}{\partial x^j}\right)$$

$$\cdot\left(g_{kq}(x)+\frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^m}\varepsilon\xi^m(x)\right)$$

$$=\left(\delta_i^k+\varepsilon\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}\right)\left(\delta_j^q+\varepsilon\frac{\partial\xi^q(x)}{\partial x^j}\right)$$

$$\cdot\left(g_{kq}(x)+\frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^m}\varepsilon\xi^m(x)\right)$$

$$=g_{ij}(x)+\varepsilon(\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}g_{kj}(x)+\frac{\partial\xi^q(x)}{\partial x^j}g_{iq}(x)$$

$$+\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^m}\xi^m(x))$$

$$\rightarrow\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}g_{kj}(x)+\frac{\partial\xi^q(x)}{\partial x^j}g_{iq}(x)+\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^m}\xi^m(x)$$

$$=0 \tag{4.3.9}$$

对(4.3.9)式作一些变化，把 $\xi^k(x)$，$\xi^q(x)$ 变成 $\xi_i(x)$，$\xi_j(x)$，则有

$$0=\frac{\partial\xi^k(x)g_{kj}(x)}{\partial x^i}-\xi^k(x)\frac{\partial g_{kj}(x)}{\partial x^i}+\frac{\partial\xi^q(x)g_{iq}(x)}{\partial x^j}$$

$$-\xi^q(x)\frac{\partial g_{iq}(x)}{\partial x^j}+g^{mq}(x)\xi_q(x)\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^m}$$

$$=\frac{\partial\xi_j(x)}{\partial x^i}+\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x^j}+\xi_q(x)g^{mq}(x)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{mj}(x)}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{im}(k)}{\partial x^j}\right)$$

$$=\frac{\partial\xi_j(x)}{\partial x^i}+\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x^j}-q\xi_q(x)\Gamma_{ij}^q(x)$$

(利用(4.2.6)式)

$$=\left(\frac{\partial\xi_j(x)}{\partial x^i}-\xi_q(x)\Gamma_{ij}^q(x)\right)+\left(\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x^j}-\xi_q(x)\Gamma_{ij}^q(x)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\nabla_i\xi_j(x)+\nabla_j\xi_i(x)\\
&=\xi_{j,i}(x)+\xi_{i,j}(x)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.3.10}
$$

由此可见,如果(4.3.10)式成立,则(4.3.8)式的坐标变换就导致一个等距变换,而 $X=\xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 就称为度规场 $g_{ij}(x)$ 的 Killing 矢量场。

可以证明,两个满足(4.3.10)式的 Killing 矢量场 X 和 Y 的李括号 $[X,Y]=Z$ 也是 Killing 矢量场,所以 Killing 矢量的集合形成一个李群,就叫做等距变换群。在 n 维黎曼流形上,最大等距变换群的参数个数是 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 个。(证明略)

§4.4　n 维黎曼流形上的四脚标架场

当 n 维黎曼流形上有旋量(取半整数自旋)场时,需要引入四脚标架场(Vierbein)和旋量联络。这一节我们扼要说明一下四脚标架场和旋量联络的内涵和它们的特点。

在黎曼流形上,可以在每一个 x 点建立一组四个互相正交的 $\xi^a(x)$ 的坐标系($a=1,2,3,4$)和坐标系的度规 $\eta_{ab}(x)$($a,b=1,2,3,4$),并要求它们与 n 维黎曼流形上的 x^μ 和 $g_{\mu\gamma}(x)$ 有如下关系:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &=g_{\mu\gamma}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\gamma=\eta_{ab}\mathrm{d}\xi^a\mathrm{d}\xi^b\\
&=g_{\mu\gamma}\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^b}\mathrm{d}\xi^a\mathrm{d}\xi^b=\eta_{ab}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^b}{\partial x^\gamma}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\gamma
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

由此导出

$$
g_{\mu\gamma}=\eta_{ab}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^b}{\partial x^\gamma},\quad \eta_{ab}=g_{\mu\gamma}\frac{\partial x^\mu}{\partial\eta^a}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\eta^b}
\tag{4.4.2}
$$

定义 4.4.1 $e_a^\mu=\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a(x)}$,则有 (4.4.3)

$$\left.\begin{aligned} & e_a=e_a^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a(x)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\frac{\partial}{\partial \xi^a(x)} \\ & \eta_{ab}=e_a^\mu e_b^\gamma g_{\mu\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.4}$$

定义 4.4.2 $\theta_\mu^a=\dfrac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu}$,则有 (4.4.5)

$$\left.\begin{aligned} & \theta^a=\theta_\mu^a\mathrm{d}x^\mu=\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu=\mathrm{d}\xi^a(x) \\ & \eta^{ab}=\theta_\mu^a\theta_\gamma^b g^{\mu\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.6}$$

由(4.4.5)和(4.4.3)式又得

$$\theta_\mu^a e_b^\mu=\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^b(x)}=\delta_b^a \tag{4.4.7}$$

于是我们得到了四个互相正交的1-形式 $\theta^a=\theta_\mu^a\mathrm{d}x^\mu=\mathrm{d}\xi^a(x)$($a=1,2,3,4$)。它们是 x 点的 Lorentz 坐标系的基本矢量,构成 x 点的四脚标架。

在引入了四脚标架后,就有了两种指标:$\mu,\gamma=1,2,\cdots,n$ 和 $a,b=1,2,3,4$,从而蕴含有两种局域的坐标变换群。一种是 n 维流形 M 上的局域坐标变换群 $x\to x'$,例如

$$e_a^\mu(x')=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma}e_a^\gamma(x),\quad \theta_\mu^a(x')=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\theta_\gamma^a(x) \tag{4.4.8}$$

另一种则是 M 上每一个点 x 上的正交四脚标架的 Lorentz 转动群,例如

$$e'^\mu_a(x)=L_a^b(x)e_b^\mu(x),\quad \theta'^a_\mu(x)=L^{-1}(x)_b^a\theta_\mu^b(x) \tag{4.4.9}$$

η_{ab} 和 η^{ab} 的取值是

$$\eta_{ab}=\eta^{ab}=\pm\delta_b^a \tag{4.4.10}$$

上式在闵氏四维空间中,$a=1,2,3$ 时取+号,$a=0$(或 4)时取

一号。

引入四脚标架是为了引入旋量波函数和引入作用于旋量波函数的 γ 矩阵。它们都是研究量子超引力理论所必须的基本手段，可惜的是，在 20 世纪 80 年代中期已经证明，量子超引力理论和量子引力理论一样，也是不可重整化的，所以对四脚标架及其性质的介绍就到此为止。

§4.5 黎曼流形上的共形变换群（流形维数>2）

考察一个 n 维黎曼流形 M，在 M 上作坐标变换，并要求这个变换满足下式（x 和 x' 代表同一个点的变换前后的坐标）：

$$g_{\mu\gamma}(x) \to g'_{\mu\gamma}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} g_{\alpha\beta}(x)$$
$$= \Omega(x) g_{\mu\gamma}(x) \tag{4.5.1}$$

这样的变换就称为共形变换，因为它保持两个矢量 u，v 的夹角不变，具体就是下式的 $\cos\theta$

$$\frac{u \cdot v}{(u^2 v^2)^{1/2}} = \cos\theta \tag{4.5.2}$$

在变换前后不变，因为从(4.5.1)式得知，下列关系是存在的：

$$u \cdot v = g_{\mu\gamma}(x) u^{\mu} v^{\gamma} \quad \to \quad \Omega(x) g_{\mu\gamma} u^{\mu} v^{\gamma}$$
$$u^2 = g_{\mu\gamma}(x) u^{\mu} u^{\gamma} \quad \to \quad \Omega(x) g_{\mu\gamma} u^{\mu} u^{\gamma}$$
$$v^2 = g_{\mu\gamma}(x) v^{\mu} v^{\gamma} \quad \to \quad \Omega(x) g_{\mu\gamma} v^{\mu} v^{\gamma}$$

平移变换和转动变换都属于共形变换，它们构成共形变换群的子群。

为了阐明共形不变性对坐标变换提出了哪些约束条件，我们最好通过 x 点邻近区域中的坐标变换，使这个区域中的 $g_{\mu\gamma}(x)$ 变为平度规 η_{ab}。为了醒目，把平度规的上下指标写成 $a,b,c,\cdots$，于是有

$$g_{ab}(x)=\eta_{ab}=\delta_{ab} \tag{4.5.3}$$

$$ds^2=g_{ab}dx^a dx^b=\eta_{ab}dx^a dx^b=\delta_{ab}dx^a dx^b$$

然后写出坐标的无限小变换：

$$x^a \to x'^a=x^a+\varepsilon^a, \quad x^a=x'^a-\varepsilon^a \tag{4.5.4}$$

取一次微小，就得

$$\begin{aligned} g'_{ab}(x') &= \frac{\partial x^f}{\partial x'^a}\frac{\partial x^g}{\partial x'^b} g_{fg}(x) \\ &= (\delta_a^f-\partial_a\varepsilon^f)(\delta_b^g-\partial_b\varepsilon^g)\delta_{fg} \\ &= \delta_{ab}-(\partial_a\varepsilon_b+\partial_b\varepsilon_a) \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

如果要求满足(4.5.1)式，则约束条件就是

$$(\partial_a\varepsilon_b+\partial_b\varepsilon_a)=\Lambda\delta_{ab} \tag{4.5.6}$$

于是有

$$\delta^{ab}(\partial_a\varepsilon_b+\partial_b\varepsilon_a)=\Lambda\delta^{ab}\delta_{ab}=\Lambda n$$

$$\begin{aligned} \to \quad \Lambda &= \frac{1}{n}\delta^{ab}(\partial_a\varepsilon_b+\partial_b\varepsilon_a) \\ &= \frac{1}{n}(\partial_a\varepsilon^a+\partial_b\varepsilon^b) \\ &= \frac{2}{n}\partial_a\varepsilon^a=\frac{2}{n}(\partial\cdot\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

利用(4.5.6)式，

$$\partial_a\varepsilon_b+\partial_b\varepsilon_a=\frac{2}{n}(\partial\cdot\varepsilon)\delta_{ab} \tag{4.5.8}$$

再利用(4.5.5)式，

$$g'_{ab}(x')=\delta_{ab}\left(1-\frac{2}{n}(\partial\cdot\varepsilon)\right)$$

与(4.5.1)式比较，得

$$\Omega(x)=1-\frac{2}{n}(\partial\cdot\varepsilon) \tag{4.5.9}$$

又从(4.5.8)式出发，

$$\partial_a\partial_b:\quad \partial_a\partial_b(\partial_c\varepsilon_d+\partial_d\varepsilon_c)=\frac{2}{n}\partial_a\partial_b(\partial\cdot\varepsilon)\delta_{cd}$$

乘 η^{bd}：

$$\partial_a\partial_b\eta^{bd}(\partial_c\varepsilon_d+\partial_d\varepsilon_c)=\frac{2}{n}\partial_a\partial_b\eta^{bd}(\partial\cdot\varepsilon)\delta_{cd}$$

$$\to\quad \partial_a\partial_c\partial_b\varepsilon^b+\partial_a\partial_b\eta^{bd}\partial_d\varepsilon_c=\partial_a\partial_c(\partial\cdot\varepsilon)+\partial_a\Box\varepsilon_c$$

$$=\frac{2}{n}\partial_a\partial_c(\partial\cdot\varepsilon)$$

$$\to\quad (n-2)\partial_a\partial_c(\partial\cdot\varepsilon)+n\Box\partial_a\varepsilon_c=0 \tag{4.5.10}$$

把(4.5.10)式中的 a,c 交换，再与(4.5.10)式相加，又得

$$2(n-2)\partial_a\partial_c(\partial\cdot\varepsilon)+n\Box(\partial_c\varepsilon_a+\partial_a\varepsilon_a)=0 \tag{4.5.11}$$

再利用(4.5.8)式，得

$$\Box(\partial_c\varepsilon_a+\partial_a\varepsilon_c)=\frac{2}{n}\Box(\partial\cdot\varepsilon)\delta_{ac}$$

代入(4.5.11)式，则有

$$(n-2)\partial_a\partial_c(\partial\cdot\varepsilon)+\Box(\partial\cdot\varepsilon)\delta_{ac}=0 \tag{4.5.12}$$

从式(4.5.10)和式(4.5.12)都看到，$n=2$ 是一个与众不同的特殊情况。后面§4.6节将讨论这种情况。

现在我们先来考察 $n>2(n=3,4,5,\cdots)$ 的情况。在 $n>2$ 时，$(n-2)\neq 0$，利用(4.5.8)式，左方$\partial_g\partial_h$ 作用上去得：

$$\partial_g\partial_h\partial_a\varepsilon_b+\partial_g\partial_h\partial_b\varepsilon_a=\frac{2}{n}\partial_g\partial_h\partial_c\varepsilon_c\delta_{ab} \tag{4.5.8$_1$}$$

(1)$a\neq b,g\neq h$：

$$\partial_g\partial_h\partial_a\varepsilon_b+\partial_g\partial_h\partial_b\varepsilon_a=0$$

两项互相独立，所以有

$$\partial_g\partial_h\partial_a\varepsilon_b=0,\quad \partial_g\partial_h\partial_b\varepsilon_a=0$$

包括$\partial_b\partial_h\partial_b\varepsilon_a=0$ 等。

(2)$a\neq b,g=h$：

$$\partial_g\partial_g\partial_a\varepsilon_b+\partial_g\partial_g\partial_b\varepsilon_a=0$$

两项互相独立，所以有

$$\partial_g\partial_g\partial_a\varepsilon_b=0$$

(3)$a=b$，对重复的 a 不求和，而对 c 求和：

$$\partial_g\partial_g\partial_a\varepsilon_a+\partial_g\partial_g\partial_a\varepsilon_a=\frac{2}{n}\partial_g\partial_g\partial_c\varepsilon_c$$

右方$\partial_g\partial_g\partial_1\varepsilon_1$，$\partial_g\partial_g\partial_2\varepsilon_n$，…，$\partial_g\partial_g\partial_n\varepsilon_n$ 互相独立，所以有

$$\partial_g\partial_g\partial_a\varepsilon_a=0,\partial_g\partial_g\partial_b\varepsilon_b=0,\cdots\partial_g\partial_g\partial_g\varepsilon_g=0$$

(4)$g=h=a=b$，对重复的 a 不求和，也得

$$\partial_g\partial_g\partial_g\varepsilon_g=0$$

总之，任何一个 ε_g（或 ε_a，…）的三次微分都等于零。利用(4.5.12)式也可证实这一点。因此结论是：ε_a 的四级数展开只有三项：一项是常数项，一项是 x 一次项，一项是 x 二次项。所以，ε_a 一般可写成

$$\varepsilon_a=\alpha_a+\alpha_{ab}x^b+\frac{1}{2}\alpha_{abc}x^bx^c \tag{4.5.13}$$

把(4.5.13)式代入(4.5.8)式，并利用(4.5.7)式，就可找到满足共形不变性要求的这些 α_a，α_{ab}，α_{abc} 系数的具体形式：

① $\varepsilon_a=\alpha_a$，α_a 是常数，代表普通的平移，一共有 n 个 α_a，有关的生成元是 P_a。

② $\varepsilon_a=\alpha_{ab}$，$\alpha_{ab}=-\alpha_{ba}$代表旋转，一共有$\frac{n(n-1)}{2}$个 α_{ab}，有关的生成元是 M_{ab}。

③ $\varepsilon_a=bx^c$，b 代表整体的伸缩，有关的生成元是 D，只有一个。

④ $\varepsilon_a=(2\delta_{ab}k_a-\delta_{ad}k_b)x^bx^d$，$k_a$ 代表特殊共性变换，一共有 n 个 k_a，有关的生成元是 K_a。

可见，在 $n>2(n=3,4,5,\cdots)$时，共形变换生成元的个数是

$$\underset{(P_a)}{n}+\underset{(M_{ab})}{\frac{n(n-1)}{2}}+\underset{(D)}{1}+\underset{(K_a)}{n}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

这个数目是有限的。

§4.6　黎曼流形上的共形变换群（流形维数 $n=2$）

取 $n=2, g_{ab}=\delta_{ab}$，则(4.5.8)式就变成如下的方程组：

$$\left.\begin{aligned}\partial_1\varepsilon_2+\partial_2\varepsilon_1=0 \quad &\rightarrow \quad \partial_1\varepsilon_2=-\partial_2\varepsilon_1\\ \partial_1\varepsilon_1+\partial_1\varepsilon_1=\partial_1\varepsilon_1+\partial_2\varepsilon_2 \quad &\rightarrow \quad \partial_1\varepsilon_1=\partial_2\varepsilon_2\end{aligned}\right\} \tag{4.6.1}$$

(4.6.1)式说明在 $n=2$ 的情况下，$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 正好满足 Cauchy-Riemann 条件。因此自然可以做到在复坐标系 $z=x^1+\mathrm{i}x^2, \bar{z}=x^1-\mathrm{i}x^2$ 中给出 $\varepsilon(z)=\varepsilon^1+\mathrm{i}\varepsilon^2, \varepsilon(\bar{z})=\varepsilon^1-\mathrm{i}\varepsilon^2$。这就显示出 2 维黎曼流形上的共形变换 $\varepsilon^1\rightarrow\varepsilon^{1\prime}, \varepsilon^2\rightarrow\varepsilon^{2\prime}$ 与复流形上 z 的解析的坐标变换

$$z\rightarrow z'=f(z), \bar{z}\rightarrow\bar{z}'=f(\bar{z}) \tag{4.6.2}$$

是一一对应的，变换前后的 $\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}s'^2$ 是

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}s'^2=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \tag{4.6.3}$$

与(4.5.6)式对照，(4.6.3)式说明(4.6.2)式确实是一个共形变换，其中 Ω 是

$$\Omega=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 \tag{4.6.4}$$

现在来看一看(4.6.2)式的无穷小变换生成元及其对易关系，设

$$\varepsilon(z)=\sum_n \varepsilon_n z^{n+1}$$

则

$$\begin{aligned}f(z)\rightarrow f(z+\varepsilon(z))&=f(z)+\varepsilon(z)\frac{\partial}{\partial z}f(z)\\ &=f(z)+\sum_n \varepsilon_n z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}f(z)\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

所以生成元有无穷个：

$$L_n = z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (n=0 \text{ 和正负整数}) \tag{4.6.6}$$

ε_n 则是无穷小变换的群参数。对易关系是

$$[L_m, L_n] = z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z}z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} - z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= (n-m)L_{m+n} \tag{4.6.7}$$

与之相仿，又有

$$\bar{L}_n = \bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (n=0 \text{ 和正负整数}) \tag{4.6.8}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = \bar{z}^{m+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^{m+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$= (n-m)\bar{L}_{m+n} \tag{4.6.9}$$

$$[\bar{L}_m, L_n] = \bar{z}^{m+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} - z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\bar{z}^{m+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$= 0 \tag{4.6.10}$$

以上 $L_m, \bar{L}_m$ 的集合和它们的对易关系式(4.6.7)，(4.6.9)，(4.6.10)构成了一个代数，这就是广为人知的 Virasoro 代数。这个代数是从维数 $n=2$ 的黎曼流形上的共形变换群的不变性导出的，所以它在 2 维时空具有共形不变性的各种物理理论中都起着特别重要的作用，包括 2 维 σ 模型理论、2 维统计物理理论等。

顺便再看一下 $n=1$，这是一个很平凡的情况，因为只有一个 ε_1，$g_{11}=1$，(4.5.5)式简化成 $g'_{11}=1-2\partial_1\varepsilon_1=1-\Lambda$，因此得

$$\Lambda = 2\partial_1\varepsilon_1, \quad \Omega = 1-\Lambda = 1-2\partial_1\varepsilon_1$$

(4.5.10)式和(4.5.12)式现在都写成

$$-\partial_1\partial_1\partial_1\varepsilon + \partial_1\partial_1\partial_1\varepsilon = 0 \qquad (\text{自动得零})$$

从而在 $n=1$ 时，无论 ε_1 取什么值，都能满足(4.5.1)式。一般就取

$$\varepsilon_1(x_1) = \sum_n \varepsilon_n x_1^{n+1}$$

$$f(x_1) \to f(x_1+\varepsilon_1(x_1)) = f(x_1) + \sum_n \varepsilon_n x_1^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1)$$

从而生成元是 $L_n=x_1^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$($n=0$,正负整数)。$L_n$ 的集合也构成一个 Virasoro 代数,它与(4.6.6)式的区别只是 x 是实数,z 是复数,生成元的个数都是无穷!

第5章 复流形

§5.1 复流形和它的特点

复流形也是一种 Hausdorff 空间(见定义 1.1.6),它上面的每一点也都有邻域覆盖。每一个邻域都各自拓扑同胚于一个 n 维复空间中的胞腔(cell),并且在两个邻域重叠的区域,局部坐标的变换是一个**复解析变换**。

例如,设 $z^1,\cdots,z^n$ 是其中一个邻域上的复坐标,$w^1,\cdots,w^n$ 是另一个邻域上的复坐标,在两个邻域的交叠处有如下函数关系:

$$w_i=u^i(z^1,\cdots,z^n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5.1.1}$$

其中每一个 u^i 都是 $z^1,\cdots,z^n$ 的一个**解析函数**,而且行列式

$$\frac{\partial(w^1,\cdots,w^n)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\neq 0\tag{5.1.2}$$

如上定义的复流形有两个很有特点的性质:

(1) 复流形的空间必定是偶维的。这是因为 n 维复流形正好要有 $2n$ 个变数方才构成 n 个复坐标。

(2) 复流形必定是定向的。

证明
$$\begin{aligned}\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}\bar{z}^1&=(\mathrm{d}x^1+\mathrm{i}\mathrm{d}y^1)\wedge(\mathrm{d}x^1-\mathrm{i}\mathrm{d}y^1)\\&=-2\mathrm{i}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}y^1\end{aligned}$$

$$\rightarrow\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n$$

$$=\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar{z}^n$$

等号两端 $dx^1 \wedge \cdots dx^n \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ 和 $(\frac{i}{2})^n dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n$ 是实数。

又取另一组局域坐标 w^k，在 w^k 与 z^k 之间存在如下关系：

$$dw^1 \wedge \cdots \wedge dw^n = J dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \tag{5.1.3}$$

J 是雅可比行列式(见(5.1.2)式)：

$$J = \frac{\partial(w^1, \cdots, w^n)}{\partial(z^1, \cdots, z^n)} \neq 0$$

它的复共轭是

$$\bar{J} = \frac{\partial(\bar{w}^1, \cdots, \bar{w}^n)}{\partial(\bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n)} \neq 0$$

所以

$$dw^1 \wedge \cdots \wedge dw^n \wedge d\bar{w}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}^n = \overline{J}J dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n \tag{5.1.4}$$

注意　这里 $\overline{J}J$ 是正实数。

由于 z 和 $\bar{z}$ 互相独立，w 和 $\bar{w}$ 也互相独立，而且 w 只与 z 有函数关系，$\bar{w}$ 只与 $\bar{z}$ 有函数关系，所以

$$\frac{\partial(w^1, \cdots, w^n, \bar{w}, \cdots, \bar{w}^n)}{\partial(z^1, \cdots, z^n, \bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(w^1, \cdots, w^n)}{\partial(z^1, \cdots, z^n)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial(\bar{w}^1, \cdots, \bar{w}^n)}{\partial(\bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n)} \end{vmatrix} = \overline{J}J > 0 \tag{5.1.5}$$

可见复流形上的任何一对有交叠区的邻域的坐标 $(w^k, \bar{w}^k)$ 和 $(z^k, \bar{z}^k)$ 的雅可比行列式必定大于零，所以复流形必定是定向的。

注意　以上两个特点都只是复流形的必要条件，但不是充分条件，例如 S^4 也是满足这两个条件的，但 Hopf 和 Ehresman 已经证明在 S^4 上面不能建立复结构，所以 S^4 并不是一个复流形。

§5.2 矢量空间上的复结构和近复流形

按照§5.1中的定义，在复流形上任意两个相邻邻域的重叠部分的坐标变换必须是一个**复解析变换**，由此可导出复结构。

取一个 n 维复流形，它的上面有复坐标：

$$z^k = x^k + \mathrm{i}y^k, \quad \bar{z}^k = x^k - \mathrm{i}y^k \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{5.2.1}$$

$$\mathrm{d}z^k = \mathrm{d}x^k + \mathrm{i}\mathrm{d}y^k, \quad \mathrm{d}\bar{z}^k = \mathrm{d}x^k - \mathrm{i}\mathrm{d}y^k \tag{5.2.2}$$

$$x^k = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k), \quad y^k = \frac{-\mathrm{i}}{2}(z^k - \bar{z}^k) \tag{5.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) \tag{5.2.4}$$

又设 f 是一个复解析函数，则有

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial z^k}\right)\mathrm{d}z^k + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}\right)\mathrm{d}\bar{z}^k \tag{5.2.5}$$

把(5.2.2)，(5.2.4)式代入(5.2.5)式，得

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k + \frac{\partial f}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k \tag{5.2.6}$$

定义 5.2.1 如果 f 是 $z^k(k=1,2,\cdots,n)$ 的全纯函数，则要求

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} = 0 \rightarrow \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}\mathrm{d}\bar{z}^k = 0 \tag{5.2.7}$$

全纯条件(Cauchy-Riemann 条件)：取 $f^j = u^j + \mathrm{i}v^j$，则全纯条件的要求就是(根据(5.2.4)式)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial(u^j + \mathrm{i}v^j)}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^k}\right)(u^j + \mathrm{i}v^j) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} - \frac{\partial u^j}{\partial y^k}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial u^j}{\partial y^k}\right)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \frac{\partial v^j}{\partial y^k}, \frac{\partial u^j}{\partial y^k} = -\frac{\partial v^j}{\partial x^k} \tag{5.2.8}$$

把上指标改写一下，取 $y^k=x^{n+k}$，$v^j=u^{n+j}(k,j=1,2,\cdots,n)$，则(5.2.8)式可归纳为一个 $2n\times 2n$ 矩阵：

$$\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k}\right)_{2n\times 2n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^1} & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^{2n}}{\partial x^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^n} & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^{2n}}{\partial x^n}\\ \frac{\partial u^1}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^{n+1}} & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial u^{2n}}{\partial x^{n+1}}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial x^{2n}} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^{2n}} & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^{2n}} & \cdots & \frac{\partial u^{2n}}{\partial x^{2n}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^1} & \frac{\partial v^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial x^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^n} & \frac{\partial v^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial x^n}\\ \frac{\partial u^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial y^1} & \frac{\partial v^1}{\partial y^1} & \vdots & \frac{\partial v^n}{\partial y^1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial y^n} & \frac{\partial v^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{pmatrix}\qquad(5.2.9)$$

其中

$$u_1=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^n}\end{pmatrix},\qquad u_2=\begin{pmatrix}\frac{\partial v^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial x^1}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial v^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}$$

$$u_3=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial u^n}{\partial y^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial u^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial u^n}{\partial y^n}\end{pmatrix},\qquad u_4=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial v^n}{\partial y^1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial v^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial v^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}$$

根据(5.2.8)式得

$$u_1=u_4,\qquad u_2=-u_3 \tag{5.2.10}$$

引入 $2n\times 2n$ 矩阵

$$J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix},\qquad I_n\text{是 } n\times n \text{ 单位矩阵} \tag{5.2.11}$$

则全纯条件——Cauchy-Riemann 条件可统一表示为

$$J\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u_3 & -u_4\\ u_1 & u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2 & u_1\\ u_4 & -u_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{pmatrix}J \tag{5.2.12}$$

J 满足 $\quad J^2=-I_{2n}$ (5.2.13)

再令 J 作用于矢量空间,则有

$$J\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^n}\\ \dfrac{\partial}{\partial x^{n+1}}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^{2n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial x^{n+1}}\\ \vdots\\ -\dfrac{\partial}{\partial x^{2n}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}J\dfrac{\partial}{\partial x^k}=-\dfrac{\partial}{\partial y^k}\\ J\dfrac{\partial}{\partial y^k}=\dfrac{\partial}{\partial x^k}\end{cases}$$

利用式(5.2.4),则有

$$J\,\frac{\partial}{\partial z^k}=\frac{1}{2}J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial z^k}$$

$$J\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}=\frac{1}{2}J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial z^k} \tag{5.2.14}$$[①]

J 就是矢量空间上的复结构,它有两个本征值$\pm\mathrm{i}$。

定义 5.2.2　在每一个 x 点($x\in M$)的 J 记作 J_x,称为切空间 $T_x(M)$ 的复结构,流形 M 上的张量场 J 则称为 M 的近复结构。(J 是 $J_x(x\in M)$ 的集合)

定义 5.2.3　可给定一个近复结构的光滑流形称为**近复流形**。

按照定义 5.2.3,复解析流形是近复流形,但近复流形不一定是复解析流形,因为不一定可在 M 上整体引入复坐标。

若 M 上有一可积近复结构,则 M 必为**复流形**(证明略)。这可作为§5.1 最后提到的充分条件。但要注意:

(1)近复流形不一定是复流形,例如 S^6 有近复结构,但它不可积,所以不是复流形(证明略)。

(2)实偶维定向流形不一定是近复流形。例如 S^{2n} 都是实偶维定向流形,但其中只有 S^2 是复流形,与 $CP(1)$ 流形同胚,其余 S^n($n\neq 1,3$)都没有近复结构(证明略)。

以下把几种映射下的不变性归纳一下:

(1)拓扑同胚映射下的流形不变性质——拓扑不变性。

(2)微分同胚映射下的流形不变性质——微分同胚不变性。(拓扑同胚映射可能改变微分结构)

---

① 以$\dfrac{\partial}{\partial z^k}$为基矢的矢量为(1,0)型,以$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$为基矢的矢量为(0,1)型。

(3)复流形在全纯映射下的不变性质——流形的复结构性质保持不变(一般微分同胚映射下,可能改变复结构性质)。对比之下可看到:全纯映射是保持复结构性质的最光滑的同胚映射。

§5.3 近厄米流形、厄米流形、厄米联络

设 M 是具有近复结构 J 的流形。在 M 上 P 点的邻域选取局域复坐标系$\{z^\alpha,\bar{z}^\alpha;\alpha=1,2,\cdots,n\}$,从而在 P 点可以定义切向量场的基矢$\bar{\partial}_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^\alpha}$和$\partial_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$,根据(5.2.14)式:

$$J\partial_\alpha=-\mathrm{i}\partial_\alpha,\qquad J\bar{\partial}_\alpha=\mathrm{i}\bar{\partial}_\alpha \tag{5.3.1}$$

再定义复流形上的厄米度规 h_{ij},它具有厄米性质(ij 上方的-表示取复共轭):

$$h_{i\bar{j}}=\overline{h_{j\bar{i}}} \tag{5.3.2}$$[①]

矢量 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$和矢量 $Y=\bar{\eta}^j\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^j}$的内积为

$$\begin{aligned}H(X,Y)&=h_{i\bar{j}}\xi^i\bar{\eta}^j\\ H(Y,X)&=h_{\bar{j}i}\bar{\xi}^i\eta^j\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

所以又得到 $H(X,Y)$的厄米性质

$$H(X,Y)=\overline{H(Y,X)} \tag{5.3.4}$$

讨论 1 因为 $h_{ij}=h_{\bar{i}\bar{j}}=0$,所以不存在 $\xi^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$和 $\eta^j\dfrac{\partial}{\partial z^j}$的内积,也不存在 $\bar{\xi}^i\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^i}$和 $\bar{\eta}^j\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^j}$的内积。

讨论 2 自(5.2.14)式,J 作用在内积 $H(X,Y)$上内积不变:

---

① $h_{i\bar{j}}$的逆矩阵元是 $h^{\bar{i}j}$:$h_{i\bar{j}}h^{\bar{j}k}=\delta_i^k$,$h^{\bar{i}j}h_{j\bar{k}}=\delta^{\bar{i}}_{\bar{k}}$。

$$H(JX,JY)=h_{i\bar{j}}(\xi^i J\frac{\partial}{\partial z^i},\bar{\eta}^j J\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$$

$$=h_{i\bar{j}}(\xi^i(-\mathrm{i})\frac{\partial}{\partial z^i},\bar{\eta}^j(i)\frac{\partial}{\bar{\partial}^j})$$

$$=h_{i\bar{j}}(\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i},\bar{\eta}^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})=H(X,Y) \tag{5.3.5}$$

讨论 3 利用(5.3.4),得知 $H(X,X)=H(\overline{X,Y})$是实的。

定义 5.3.1 具有厄米度规的近复流形称为**近厄米流形**。

定义 5.3.2 具有**恒正厄米度规**的复流形称为**厄米流形**。

注意 根据(5.3.2)式和行列式的性质,

$$\det(h_{i\bar{j}})=\begin{vmatrix} h_{1\bar{1}} & h_{1\bar{2}} & h_{1\bar{3}} & \cdots \\ h_{2\bar{1}} & h_{2\bar{2}} & h_{2\bar{3}} & \cdots \\ h_{3\bar{1}} & h_{3\bar{2}} & h_{3\bar{3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bar{h}_{1\bar{1}} & \bar{h}_{2\bar{1}} & \bar{h}_{3\bar{1}} & \cdots \\ \bar{h}_{1\bar{2}} & \bar{h}_{2\bar{2}} & \bar{h}_{3\bar{2}} & \cdots \\ \bar{h}_{1\bar{3}} & \bar{h}_{2\bar{3}} & \bar{h}_{3\bar{3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \bar{h}_{1\bar{1}} & \bar{h}_{1\bar{2}} & \bar{h}_{1\bar{3}} & \cdots \\ \bar{h}_{2\bar{1}} & \bar{h}_{2\bar{2}} & \bar{h}_{2\bar{3}} & \cdots \\ \bar{h}_{3\bar{1}} & \bar{h}_{3\bar{2}} & \bar{h}_{3\bar{3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}=\overline{\det(h_{i\bar{j}})} \tag{5.3.6}$$

所以 $\det(h_{i\bar{j}})$必定是实数。

若 $\det(h_{i\bar{j}})$不但是实数,而且>0,则称 $h_{i\bar{j}}$为恒正厄米度规。

在厄米流形中,仿照(4.1.7)和(4.1.8)式,取

$$\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}=\begin{vmatrix}\delta^1_{i_1} & \cdots & \delta^1_{i_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^n_{i_1} & \cdots & \delta^n_{i_n}\end{vmatrix},\delta^{\bar{1}\cdots\bar{n}}_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_n}=\begin{vmatrix}\delta^{\bar{1}}_{\bar{j}_1} & \cdots & \delta^{\bar{1}}_{\bar{j}_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \delta^{\bar{n}}_{\bar{j}_1} & \cdots & \delta^{\bar{n}}_{\bar{j}_n}\end{vmatrix} \tag{5.3.7}$$

和

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\eta\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n},\quad \varepsilon_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_n}=\bar{\eta}\delta^{\bar{1}\cdots\bar{n}}_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_n},\quad \bar{\eta}\eta=h$$

再引入 Hodge * 运算，可把黎曼几何中的一些与 Hodge * 有关的结果推广到厄米流形中去。因计算方法类似，而篇幅较长，此处略去。

在复流形 M 上也可以引入联络。例如，设 M 上某点 P 的邻域的坐标系为 $\mathrm{d}z^i$，$\mathrm{d}\bar{z}^i$，则仿照(3.1.9)式，可对矢量$\frac{\partial}{\partial z^i}$和$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$定义协变导数如下：

$$\begin{aligned}\nabla\frac{\partial}{\partial z^k}=&\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}+\Gamma^{\bar{i}}_{jk}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\\ &+\Gamma^i_{\bar{j}k}\mathrm{d}z^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial z^i}+\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k}\mathrm{d}z^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

J 从左边作用上去，根据复结构的性质(5.2.14)式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\nabla\frac{\partial}{\partial z^k}=&\mathrm{i}\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}-\mathrm{i}\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\\ &+\mathrm{i}\Gamma^i_{\bar{j}k}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}-\mathrm{i}\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k}\mathrm{d}z^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

于是，如果要求复结构的 J 作用上去后，不发生抵触，即不破坏复结构性质，就必须(对比(5.3.8)式和(5.3.9)式)：

$$\Gamma^{\bar{i}}_{jk}=\Gamma^i_{\bar{j}k}=0,\quad \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k}=\Gamma^i_{\bar{j}k}=0 \tag{5.3.10}$$

对于厄米流形，还要求联络与度规之间没有抵触，就是说，如果要求出两个矢量场 $X=\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$和 $Y=\bar{\eta}^\beta\frac{\partial}{\partial z^\beta}$的内积，就必须按照厄米

度规的规则进行计算，即(根据(5.3.3)式)内积等于

$$H(X,Y)=h_{\alpha\bar{\beta}}\xi^{\alpha}\eta^{\bar{\beta}} \tag{5.3.11}$$

再参考(4.2.3)式，如果 $X=\xi^{i}\dfrac{\partial}{\partial z^{i}}$ 与 $Y=\bar{\eta}^{i}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^{i}}$ 沿厄米流形上的任意的曲线**平行输运**时保持不变，则必定要求

$$\begin{aligned}\nabla X &= \nabla\left(\xi^{i}\frac{\partial}{\partial z^{i}}\right)=(\nabla\xi^{i})\frac{\partial}{\partial z^{i}}+\xi^{i}\left(\nabla\frac{\partial}{\partial z^{i}}\right)\\ &=(\mathrm{d}\xi^{j}+\xi^{i}\Gamma_{i}^{j})\frac{\partial}{\partial z^{j}}=0\\ \nabla Y &= \nabla\left(\bar{\eta}^{j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{j}}\right)=(\nabla\bar{\eta}^{j})\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{j}}+\bar{\eta}^{j}\left(\nabla\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{j}}\right)\\ &=(\mathrm{d}\bar{\eta}^{j}+\bar{\eta}^{i}\Gamma_{\bar{i}}^{\bar{j}})\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{j}}=0\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

可见在平行输运时有

$$\mathrm{d}\xi^{j}=-\xi^{i}\Gamma_{i}^{j},\ \mathrm{d}\bar{\eta}^{j}=-\bar{\eta}^{i}\Gamma_{\bar{i}}^{\bar{j}} \tag{5.3.13}$$

若是 $H(X,Y)=h_{\alpha\bar{\beta}}\xi^{\alpha}\bar{\eta}^{\beta}$ 沿厄米流形上任意曲线平行输运时保持不变，则要求(利用(5.3.13)式)

$$\begin{aligned}\nabla(h_{i\bar{j}}\xi^{i}\bar{\eta}^{j}) &= (\mathrm{d}h_{i\bar{j}})\xi^{i}\bar{\eta}^{j}+h_{i\bar{j}}(\mathrm{d}\xi^{i})\bar{\eta}^{j}+h_{i\bar{j}}\xi^{i}(\mathrm{d}\bar{\eta}^{j})\\ &=(\mathrm{d}h_{i\bar{j}})\xi^{i}\bar{\eta}^{j}-h_{i\bar{j}}(\xi^{k}\Gamma_{k}^{i})\bar{\eta}^{j}-h_{i\bar{j}}\xi^{i}\bar{\eta}^{k}\Gamma_{\bar{k}}^{\bar{i}}\\ &=\mathrm{d}h_{i\bar{j}}\xi^{i}\bar{\eta}^{j}-h_{i\bar{j}}\xi^{k}\Gamma_{k}^{i}\bar{\eta}^{j}-h_{i\bar{j}}\xi^{i}\bar{\eta}^{k}\Gamma_{\bar{k}}^{\bar{j}}\\ &=[\mathrm{d}h_{i\bar{j}}-h_{k\bar{j}}\Gamma_{i}^{k}-h_{i\bar{q}}\Gamma_{\bar{j}}^{\bar{q}}]\xi^{i}\bar{\eta}^{j}=0\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

由于 ξ^{i}，$\bar{\eta}^{j}$ 是任意的，所以要求

$$\mathrm{d}h_{i\bar{j}}-\Gamma_{i}^{k}h_{k\bar{j}}-\Gamma_{\bar{j}}^{\bar{q}}h_{i\bar{q}}=0 \tag{5.3.15}$$

这就是厄米流形中的容许联络 $h_{i\bar{j}}$ 所要满足的条件。若在式(4.2.2)式的右方乘上 $\mathrm{d}x^{k}$，则得到与(5.3.15)式相似的形式

$$\mathrm{d}g_{ij}-\Gamma_{i}^{q}g_{qj}-\Gamma_{j}^{q}g_{qi}=0$$

可见，厄米流形中的容许联络是黎曼流形中的容许联络在厄米流形

中的推广。

在第 4 章黎曼流形的探讨中，还证明了可以从容许联络给出关系 $\Omega^k_i g_{kj}+\Omega^k_j g_{ki}=0$（见式(4.2.15)）。

在厄米流形中，也存在类似的关系式，现说明如下。

对(5.3.15)式取外微分，得

$$-\mathrm{d}\Gamma^k_i h_{k\bar j}+\Gamma^k_i\wedge \mathrm{d}h_{k\bar j}-\mathrm{d}\Gamma^{\bar q}_{\bar j} h_{i\bar q}+\Gamma^{\bar q}_{\bar j}\wedge \mathrm{d}h_{i\bar q}=0。$$

再根据式(5.3.15)，把 $\mathrm{d}h_{k\bar j}=h_{q\bar j}\Gamma^q_k+h_{k\bar q}\Gamma^{\bar q}_{\bar j}$ 代入，又得

$$-\mathrm{d}\Gamma^k_i h_{k\bar j}+\Gamma^k_i\wedge(h_{q\bar j}\Gamma^q_k+h_{k\bar q}\Gamma^{\bar q}_{\bar j})$$

$$-\mathrm{d}\Gamma^{\bar q}_{\bar j} h_{i\bar q}+\Gamma^{\bar q}_{\bar j}\wedge(h_{s\bar q}\Gamma^s_i+h_{i\bar q}\Gamma^{\bar q}_{\bar q})=0$$

其中 $\Gamma^k_i\wedge h_{k\bar q}\Gamma^{\bar q}_{\bar j}$ 和 $\Gamma^{\bar q}_{\bar j}\wedge h_{s\bar q}\Gamma^s_i$ 抵消后，等式写成：

$$-\mathrm{d}\Gamma^k_i h_{k\bar j}-h_{q\bar j}\Gamma^q_k\wedge\Gamma^k_i-\mathrm{d}\Gamma^{\bar q}_{\bar j} h_{i\bar q}-h_{i\bar q}\wedge\Gamma^q_q\Gamma^q_{\bar j}=0$$

整理得

$$h_{q\bar j}(\mathrm{d}\Gamma^q_i+\Gamma^q_k\wedge\Gamma^k_i)+h_{i\bar q}(\mathrm{d}\Gamma^{\bar q}_{\bar j}+\Gamma^{\bar q}_{\bar k}\wedge\Gamma^{\bar k}_{\bar j})=0 \qquad (5.3.16)$$

与式(3.3.6)对比：Γ^q_i 与 w^a_b 相当，$(\mathrm{d}\Gamma^q_i+\Gamma^q_k\wedge\Gamma^k_i)$ 与 Ω^a_b 相当，所以式(5.3.16)与式(4.2.15)的 $\Omega^k_i g_{kj}+\Omega^k_j g_{ki}=\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0$ 相当。

回顾(3.2.6)式，曲率 R^a_{kij} 为

$$R^a_{kij}=\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^a_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^b_{jk}\Gamma^a_{ib}-\Gamma^b_{ik}\Gamma^a_{jb}$$

在厄米流形的情况，则有

$$R^a_{\bar bcd}=\frac{\partial}{\partial z^c}\Gamma^a_{d\bar b}-\frac{\partial}{\partial z^d}\Gamma^a_{c\bar b}+\Gamma^a_{cn}\Gamma^n_{d\bar b}-\Gamma^a_{dn}\Gamma^n_{c\bar b}$$

$$R^{\bar a}_{bcd}=\frac{\partial}{\partial z^c}\Gamma^{\bar a}_{db}-\frac{\partial}{\partial z^d}\Gamma^{\bar a}_{cb}+\Gamma^{\bar a}_{cn}\Gamma^n_{db}-\Gamma^{\bar a}_{cn}\Gamma^n_{db}-\Gamma^{\bar a}_{dn}\Gamma^n_{cb} \qquad (5.3.17)$$

由于 J 作用上去不破坏复结构性质，要求(5.3.10)式必须成立，所以(5.3.17)式中的 R^a_{bcd} 和 $R^{\bar a}_{bcd}$ 都是零。

$$R^a_{bcd}=R^{\bar a}_{bcd}=0 \qquad (5.3.18)$$

这也是要求保持近复结构(J 作用上去不发生抵触)的结果。

§5.4 Kähler 流形

复流形上如果定义了厄米度规

$$ds^2 = 2h_{\alpha\bar{\beta}}\,dz^\alpha d\bar{z}^\beta \tag{5.4.1}$$

就可定义微分形式:

$$K = \mathrm{i}h_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \tag{5.4.2}$$

称为 Kähler 形式,它是实的,因为利用(5.3.2)式得

$$\overline{K} = -\mathrm{i}h_{\beta\bar{\alpha}}\, d\bar{z}^{\bar{\alpha}} \wedge dz^\beta = \mathrm{i}\, h_{\beta\bar{\alpha}}\, dz^\beta \wedge d\bar{z}^{\bar{\alpha}} = K$$

若复流形上的 Kähler 形式是闭的:

$$dK = 0 \tag{5.4.3}$$

则定义这个复流形 M 为 Kähler **流形**。由于

$$\begin{aligned}
dK &= \mathrm{i}\,\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma}dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \mathrm{i}\,\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma}d\bar{z}^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} - \frac{\partial h_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^\alpha}\right)dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} - \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\beta}\right)d\bar{z}^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta
\end{aligned}$$

所以厄米流形 M 是 Kähler 流形(满足 $dK=0$)的充要条件为

$$\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial h_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^\alpha},\ \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} = \frac{\partial h_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\beta} \tag{5.4.4}$$

再来考察 Kähler 度规对联络的要求,先写出协变微分:

$$\nabla_\lambda h^{\bar{\gamma}\beta} = \frac{\partial}{\partial z^\lambda}h^{\bar{\gamma}\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\delta}h^{\bar{\gamma}\delta} + \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\lambda\bar{\delta}}h^{\bar{\delta}\beta}$$

$$\nabla_\lambda h_{\alpha\bar{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial z^\lambda}h_{\alpha\bar{\gamma}} - \Gamma^\delta_{\lambda\alpha}h_{\delta\bar{\gamma}} - \Gamma^{\bar{\delta}}_{\lambda\bar{\gamma}}h_{\alpha\bar{\delta}} \tag*{(5.4.5)$_1$}$$

由于复结构 J 的要求(见(5.3.10)式,(5.4.5)$_1$ 式可简化为

$$\nabla_\lambda h^{\bar{\gamma}\beta} = \frac{\partial}{\partial z^\lambda} h^{\bar{\gamma}\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\delta} h^{\bar{\gamma}\delta}$$

$$\nabla_\lambda h_{\alpha\bar{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial z^\lambda} h_{\alpha\bar{\gamma}} - \Gamma^\delta_{\lambda\alpha} h_{\delta\bar{\gamma}} \qquad (5.4.5)_2$$

自(5.3.15)式已知厄米容许联络满足(5.3.15)式

$$\mathrm{d}h_{i\bar{j}} - h_{q\bar{j}}\Gamma^q_i - h_{i\bar{q}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{j}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}\mathrm{d}z^k + \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k}\mathrm{d}\bar{z}^k - h_{q\bar{j}}\Gamma_{ki}\mathrm{d}z^k - h_{i\bar{q}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{k}\bar{j}}\mathrm{d}\bar{z}^k = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - h_{q\bar{j}}\Gamma^q_{ki}\right)\mathrm{d}z^k + \left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} - h_{i\bar{q}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{k}\bar{j}}\right)\mathrm{d}\bar{z}^k = 0$$

所以取厄米容许联络时,存在如下关系(因 $\mathrm{d}z^k$,$\mathrm{d}\bar{z}^k$ 任意)

$$\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = h_{q\bar{j}}\Gamma^q_{ki}, \quad \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = h_{q\bar{j}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{k}\bar{j}} \qquad (5.4.6)$$

把式(5.4.6)代入式(5.4.4),得

$$\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} = h_{q\bar{\beta}}\Gamma^q_{\gamma\alpha} = \frac{\partial h_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^\alpha} = h_{q\bar{\beta}}\Gamma^q_{\alpha\gamma} \rightarrow \Gamma^q_{\gamma\alpha} = \Gamma^q_{\alpha\gamma}$$

$$\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} = h_{\alpha\bar{q}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} = \frac{\partial h_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\beta} = h_{\alpha\bar{q}}\Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \rightarrow \Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} = \Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \qquad (5.4.7)$$

所以 $h_{\alpha\bar{\beta}}$是 Kähler 度规的充要条件又可写成

$$\Gamma^q_{\alpha\gamma} = \Gamma^q_{\gamma\alpha}, \quad \Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} = \Gamma^{\bar{q}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \qquad (5.4.8)$$

即 Kähler 度规的充要条件是无挠(参见(3.2.8)与(4.2.5)式)。

由于 Kähler 流形的度规是无挠的,所以可导出 Kähler 流形的一些特殊性质,使算式简化。例如,取

$$\psi = \psi_{\alpha\bar{\beta}}\mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta \qquad (5.4.9)$$

则 ψ 的协变微分$\nabla_a\psi$ 为(参考(3.1.16)式关于∇_i 的定义)

$$\left.\begin{aligned} \nabla_a\psi_{\alpha\bar{\beta}}\mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta &= \left(\frac{\partial\psi_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^a} - \Gamma^\sigma_{a\alpha}\psi_{\sigma\bar{\beta}}\right)\mathrm{d}z^a \wedge \mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta \\ \nabla_{\bar{b}}\psi_{\alpha\bar{\beta}}\mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta &= \left(\frac{\partial\psi_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^b} - \Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{b}\bar{\beta}}\psi_{\alpha\bar{\sigma}}\right)\mathrm{d}\bar{z}^b \wedge \mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.10)$$

由于 Kähler 度规：

$$\Gamma^{\sigma}_{a\alpha}=\Gamma^{\sigma}_{\alpha a}，\quad dz^{a}\wedge dz^{\alpha}=-dz^{\alpha}\wedge dz^{a}\qquad（反对称）$$

$$\Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{b}\bar{\beta}}=\Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\beta}\bar{b}}，\quad d\bar{z}^{\bar{b}}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}}=-d\bar{z}^{\bar{\beta}}\wedge d\bar{z}^{\bar{b}}\qquad（反对称）$$

所以(5.4.10)式中含 $\Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{b}\bar{\beta}}$ 和含 $\Gamma^{\sigma}_{a\alpha}$ 的项都没有贡献！(5.4.10)式简化成

$$\left.\begin{aligned}\nabla_{a}\psi_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}}&=\left(\frac{\partial\psi_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^{a}}\right)dz^{a}\wedge dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\beta}\\ \nabla_{\bar{b}}\psi_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}}&=\left(\frac{\partial\psi_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}}\right)d\bar{z}^{\bar{b}}\wedge dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\beta}\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.11)$$

这个证明说明，在 Kähler 流形中，协变微分中 Γ 项不出现：

$$\begin{aligned}&\nabla_{a}\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_p,\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &=\frac{\partial\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_p,\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}}{\partial z^{a}}dz^{a}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\\ &\quad\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &=\partial\psi\end{aligned}\qquad(5.4.12)_1$$

$$\begin{aligned}&\nabla_{\bar{\beta}}\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &=\frac{\partial\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_p,\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}}{\partial \bar{z}^{\bar{\beta}}}dz^{a}dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\\ &\quad\wedge dz^{\alpha_p}\wedge(-1)^{p}d\bar{z}^{\bar{\beta}}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &=\bar{\partial}\psi\end{aligned}\qquad(5.4.12)_2$$

在式$(5.4.12)_1$ 和式$(5.4.12)_2$ 中，我们引入了两个微分算子：

$$\partial=\sum_{\alpha=1}^{n}dz^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\quad\bar{\partial}=\sum_{\bar{\alpha}=1}^{n}d\bar{z}^{\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\bar{\alpha}}}\qquad(5.4.13)$$

合起来就是

$$d=(\partial+\bar{\partial})\qquad(5.4.14)$$

与 d・d=0 相仿，必定也有(参考(1.4.17)式)

$$\partial \cdot \partial = 0, \quad \bar{\partial} \cdot \bar{\partial} = 0 \tag{5.4.15}$$

由于 $dz^i \wedge d\bar{z}^j = -d\bar{z}^j \wedge dz^i$，所以

$$\partial \cdot \bar{\partial} = -\bar{\partial} \cdot \partial \tag{5.4.16}$$

又定义余微分算子(Hodge * 的定义见(3.4.10)式)

$$\delta = -*d* = -*(\partial + \bar{\partial})* = \theta + \bar{\theta} \tag{5.4.17}$$

其中

$$\theta = -*\bar{\partial}*, \quad \bar{\theta} = -*\partial* \tag{5.4.18}$$

仿照(3.4.3)式，引入复 Hodge * 运算(n 是复流形的复维数)：

$$*(dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}) = \frac{1}{(n-p)!\ (n-q)!} i^n \cdot (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+np} \varepsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}_{\bar{\gamma}_1 \cdots \bar{\gamma}_{n-p}} \cdot \varepsilon^{\bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_q}_{\delta_1 \cdots \delta_{n-q}} dz^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\delta_{n-q}} \wedge d\bar{z}^{\bar{\gamma}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\gamma}_{n-p}} \tag{5.4.19}$$

例 1 $p = q = 0$。

$$得 *1 = \frac{1}{n!\ n!} i^n (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \varepsilon_{\bar{\gamma}_1 \cdots \bar{\gamma}_n} \cdot \varepsilon_{\delta_1 \cdots \delta_n} dz^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\delta_n} \wedge d\bar{z}^{\bar{\gamma}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\gamma}_n} \tag{5.4.20}$$

取复共轭：

$$\begin{aligned}
\overline{*1} &= \frac{1}{n!\ n!} (-1)^n i^n (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \varepsilon_{\gamma_1 \cdots \gamma_n} \cdot \varepsilon_{\bar{\delta}_1 \cdots \bar{\delta}_n} d\bar{z}^{\bar{\delta}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\delta}_n} dz^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\gamma_n} \\
&= \frac{1}{n!\ n!} (-1)^{n+\frac{1}{2}n(n-1)+n^2} i^n \varepsilon_{\bar{\delta}_1 \cdots \bar{\delta}_n} \cdot \varepsilon_{\gamma_1 \cdots \gamma_n} dz^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\gamma_n} \wedge d\bar{z}^{\bar{\delta}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\delta}_n} \\
&= \frac{1}{n!\ n!} i^n (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \varepsilon_{\bar{\delta}_1 \cdots \bar{\delta}_n} \cdot \varepsilon_{\gamma_1 \cdots \gamma_n} dz^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\gamma_n} \wedge d\bar{z}^{\bar{\delta}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{\delta}_n} \\
&= *1
\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

所以 * 是一个实算子。

例2 * 从左边作用在式(5.4.19)上，得

$$**(dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_q})$$

$$=\text{常数}(dz^{\alpha_1}\wedge dz^{\alpha_2}\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_q})$$

再利用(5.4.15)式就可得

$$\theta\theta=*\bar{\partial}**\bar{\partial}*=\text{常数}*\overline{\partial\partial}*=0$$

$$\bar{\theta}\bar{\theta}=*\partial**\partial*=\text{常数}*\partial\partial*=0 \tag{5.4.22}$$

利用(5.4.17)式：

$$\delta\delta=*d**d*=\text{常数}*dd*=0 \tag{5.4.23}$$

从而找到三种 Laplace 类型的算子：

$$\Delta=(d+\delta)^2=d\delta+\delta d$$

$$\square=(\partial+\theta)^2=\partial\theta+\theta\partial \tag{5.4.24}$$

$$\overline{\square}=(\bar{\partial}+\bar{\theta})^2=\bar{\partial}\,\bar{\theta}+\overline{\theta\partial}$$

它们之间存在如下关系：

$$\Delta=2\square=2\overline{\square} \tag{5.4.25}$$

为了证明(5.4.25)式，我们引入 Λ 算子。对于任意一个微分形式：

$$F=\frac{1}{p!\ q!}f_{\alpha_1\cdots\alpha_p,\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\overline{z}^{-\bar{\beta}_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_q} \tag{5.4.26}$$

Λ 从左边作用上去得(Λ 的定义)

$$\Lambda F=\frac{1}{(p-1)!\ (q-1)!}ih^{\bar{\beta}\alpha}f_{\alpha\bar{\beta}\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_2}\wedge\cdots$$

$$\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_q}$$

$$=\frac{1}{(p-1)!\ (q-1)!}ih^{\bar{\beta}\alpha}(-1)^{p-1}f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}$$

$$dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\alpha_p}\wedge d\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge dz^{\bar{\beta}}_{q}$$

因为 $f_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}$ 对于下指标是反对称的，所以出现一个 $(-1)^{p-1}$ 因子，来源是下指标 $\bar{\beta}$ 换位 $(p-1)$ 次。

注意到 Λ 作用于 F 时，引起变动的指标只有 α_1 和 $\bar{\beta}_1$，其他指标不受影响，另外，Λ 还引入了一个 i，所以与 ΛF 对比之下，$\overline{\Lambda}F$ 应写成：

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}F &= \frac{1}{(p-1)!\ (q-1)!}(-\mathrm{i})\overline{h^{\bar{\beta}\alpha}}f_{\bar{\alpha}\beta\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}\,\mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge\\ &\quad\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &= \frac{1}{(p-1)!\ (q-1)!}(-\mathrm{i})h^{\bar{\alpha}\beta}(-1)^p f_{\beta\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\alpha}\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}\,\mathrm{d}z^{\alpha_2}\\ &\quad\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &= \frac{1}{(p-1)!\ (q-1)!}\mathrm{i}h^{\bar{\alpha}\beta}(-1)^{p+1} f_{\beta\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\alpha}\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}\,\mathrm{d}z^{\alpha_2}\\ &\quad\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q}\\ &= \Lambda F \end{aligned}\tag{5.4.27}$$

所以 Λ 是一个实算子。

现在我们要证明如下关系

$$\bar{\partial}\Lambda-\Lambda\bar{\partial}=-\mathrm{i}\theta,\quad \partial\Lambda-\Lambda\partial=\mathrm{i}\bar{\theta}\tag{5.4.28}$$

由于 Λ 是实算子，∂ 与 $\bar{\partial}$ 互相复共轭，又由于 $*$ 是实算子（见(5.4.21)式），所以 θ 与 $\bar{\theta}$ 也互相复共轭（见(5.4.18)式）。可见，(5.4.28)式中的两个式子是互相复共轭的，只须证明第一式。

这里需要导出 Kahler 度规的又一特性。以 $h^{\bar{j}m}$ 乘(5.4.6)式中第一式，对 $\bar{j}$ 求和

$$h^{\bar{j}m}\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}=-h_{i\bar{j}}\frac{\partial h^{\bar{j}m}}{\partial z^k}=h^{\bar{j}m}h_{q\bar{j}}\Gamma^q_{ki}=\Gamma^m_{ki}$$

得知

$$\nabla_k h^{\bar{q}m}=\frac{\partial h^{\bar{q}m}}{\partial z^k}+h^{\bar{q}i}\Gamma^m_{ki}=0\tag{5.4.29$_1$}$$

相仿地，

$$\nabla_{\bar{k}} h^{\bar{q}n} = \frac{\partial h^{\bar{q}n}}{\partial z^{\bar{k}}} + h^{\bar{j}n} \Gamma^{\bar{q}}_{\bar{k}\bar{j}} = 0 \tag{5.4.29$_2$}$$

利用这个特性，可以去证明(5.4.28)式。

首先，根据(5.4.27)式写出(利用(5.4.29)式)：

$$\bar{\partial} \wedge F = \frac{\mathrm{i}}{(p-1)!\ (q-1)!}(-1)^{p-1}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}_1}} h^{\bar{\beta}\alpha} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q}$$

$$\cdot(-1)^{p-1}\mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_1}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_2}$$

$$\wedge\cdots\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_q} \tag{5.4.30$_1$}$$

在式(5.4.30)$_1$ 中依次变换指标($\bar{\beta}_1 \rightleftharpoons \bar{\beta}_2$)，($\bar{\beta}_2 \rightleftharpoons \bar{\beta}_3$)，…，($\bar{\beta}_{q-1} \rightleftharpoons \bar{\beta}_q$)得到 q 个相等的项，相加再除以 q，得

$$\bar{\partial} \wedge F = \frac{\mathrm{i}}{(p-1)!\ q!} h^{\bar{\beta}\alpha}(\nabla_{\bar{\beta}_1} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\cdots\bar{\beta}_q}$$

$$-\nabla_{\bar{\beta}_2} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3\cdots\bar{\beta}_q} + \nabla_{\bar{\beta}_3} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_q} - \cdots$$

$$+(-1)^{q-1}\nabla_{\bar{\beta}_q} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_{q-1}})\mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge\cdots$$

$$\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_1}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_q} \tag{5.4.30$_2$}$$

以下我们要找出 $\wedge\bar{\partial}F$。(5.4.26)式已经给出 F 和 $\wedge F$ 的一个例子，其要点之一是 $f_{\alpha\beta\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_p}$ 必须是全反对称的。现在取

$$\bar{\partial}F = \frac{(-1)^p}{p!\ q!}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}_0}} f_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_q}\mathrm{d}z^{\alpha_1}\wedge\cdots\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_0}\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\mathrm{d}z^{\bar{\beta}_q}$$

$\wedge$ 作用上去，由于对 $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \cdots, \bar{\beta}_q$ 全反对称，所以要把 $\bar{\partial}F$ 中的 $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \cdots, \bar{\beta}_q$ 全反对称化：

$$\wedge\bar{\partial}F = \frac{(-1)^p(-1)^{p-1}}{(p-1)!\ (q-1)!}\frac{\mathrm{i}h^{\bar{\beta}\alpha}}{q}\cdot(\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}_0}} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4\cdots\bar{\beta}_q}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}_1}} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4\cdots\bar{\beta}_q} + \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}_2}} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4\cdots\bar{\beta}_l} - \cdots$$

$$+(-1)\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\bar{\beta}_q}} f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\cdots\bar{\beta}_{q-1}}\big)\cdot \mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge\cdots$$

$$\wedge\,\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q} \qquad (5.4.30)_3$$

式$(5.4.30)_3$中的$\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\beta_i}}$都可换成$\nabla_{\bar{\beta}_i}$，再与$(5.4.30)_2$式相减，就得

$$(\bar{\partial}\wedge-\wedge\bar{\partial})F=\frac{\mathrm{i}}{(p-1)!\ q!}h^{\bar{\beta}\alpha}\nabla_{\bar{\beta}_0}f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4\cdots\bar{\beta}_q}$$

$$\cdot\,\mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_2}$$

$$\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q} \qquad (5.4.31)$$

同时，我们可以直接算出：

$$-\mathrm{i}\theta F=\mathrm{i}*\bar{\partial}*F$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{(p-1)!\ q!}h^{\bar{\beta}\alpha}\nabla_{\bar{\beta}_0}f_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_p\bar{\beta}\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4\cdots\bar{\beta}_q}\cdot \mathrm{d}z^{\alpha_2}\wedge$$

$$\cdots\wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\beta}_q} \qquad (5.4.32)$$

把(5.4.31)式和(5.4.32)式对比，得

$$(\bar{\partial}\wedge-\wedge\bar{\partial})F=-\mathrm{i}\theta F$$

(5.4.28)式得证

根据(5.4.24)式和(5.4.28)式：

$$\square=\partial\theta+\theta\partial=\mathrm{i}\partial(\bar{\partial}\wedge-\wedge\bar{\partial})+\mathrm{i}(\bar{\partial}\wedge-\wedge\bar{\partial})\partial$$

$$=-\mathrm{i}(\partial\bar{\partial}\wedge-\partial\wedge\bar{\partial}+\bar{\partial}\wedge\partial-\wedge\bar{\partial}\partial)$$

$$\overline{\square}=\overline{\partial\theta}+\overline{\theta\partial}=-i\partial(\partial\wedge-\wedge\partial)-\mathrm{i}(\partial\wedge-\wedge\partial)\bar{\partial}$$

$$=-\mathrm{i}(\bar{\partial}\partial\wedge-\bar{\partial}\wedge\partial+\partial\wedge\partial-\wedge\partial\bar{\partial})$$

$$=\mathrm{i}(\partial\bar{\partial}\wedge+\bar{\partial}\wedge\partial-\partial\wedge\bar{\partial}-\wedge\bar{\partial}\partial)$$

所以 $\square=\overline{\square}$。

再根据式(5.4.24)，(5.4.14)，(5.4.17)和式(5.4.28)，

$$\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}=(\partial+\bar{\partial})(\theta+\bar{\theta})+(\theta+\bar{\theta})(\partial+\bar{\partial})$$

$$=\partial\theta+\theta\partial+\bar{\partial}\,\bar{\theta}+\overline{\theta\partial}+\partial\bar{\theta}+\bar{\theta}\partial+\bar{\partial}\theta+\theta\bar{\partial}$$

$$=\square+\overline{\square}+\partial\bar{\theta}+\bar{\theta}\partial+\bar{\partial}\theta+\theta\bar{\partial}$$

其中

$$\partial\bar{\theta}+\bar{\theta}\partial=\partial(-\mathrm{i}\partial\wedge+\mathrm{i}\wedge\partial)+(-\mathrm{i}\partial\wedge+\mathrm{i}\wedge\partial)\partial=0$$

$$\bar{\partial}\theta+\theta\bar{\partial}=\bar{\partial}(\mathrm{i}\bar{\partial}\wedge-\mathrm{i}\wedge\bar{\partial})+(\mathrm{i}\bar{\partial}\wedge-\mathrm{i}\wedge\bar{\partial})\bar{\partial}=0$$

所以(5.4.25)式的 $\Delta=\square+\overline{\square}=2\square=2\overline{\square}$成立。

第2部分　整体拓扑性质

第6章　流形的同伦性质与同伦群

§6.1　同伦映射

定义 6.1.1　拓扑流形是一个 Hausdorff 空间，它的每一个点都有一个与 R^n 同胚的邻域。

以下就利用两个拓扑流形之间的连续映射，来探讨不相同的连续映射之间的同伦关系。

设有两个拓扑流形 X 和 Y，又设有两个连续映射 f 和 g。f(或 g)可以把 X(或 Y)的点 1∶1 对应地映射到 Y(或 X)上面相应的点：

$$\begin{aligned} f &: X \to Y \\ g &: Y \to X \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

f 和 g 都是可以连续形变的，于是又有如下定义。

定义 6.1.2　如果映射 f_a 可以连续形变到 f_b(或映射 f_b 可连

续形变到 f_a)，则称 f_a 和 f_b 是两个相互同伦的映射。

可以具体地用函数 $F(x,\lambda)$ 来表达 f_a 和 f_b 的连续形变：

$$\begin{aligned} &\lambda=a\ 时：F(x,a)=f_a(x) \\ &\lambda=b\ 时：F(x,b)=f_b(x) \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

x 代表拓扑流形 X 上的点，$f_a(x)$ 和 $f_b(x)$ 都是 Y 上的点。

当 λ 连续地由 a 变到 b 时，$F(x,\lambda)$ 也连续地由 $f_a(x)$ 变到 $f_b(x)$。在这种情况下，就称 $f_a(x)$ 和 $f_b(x)$ 是相互同伦的映射，可把 $f_a(x)$ 和 $f_b(x)$ 的同伦性质表达如下式：

$$f_a \simeq f_b \tag{6.1.3}$$

注意 在 f_a 与 f_b 相互同伦的定义中，仅要求 f_a 与 f_b 为 1∶1 对应的连续映射，并不要求 $f_a(x)$ 与 $f_b(x)$ 为可逆映射。

定义 6.1.3 两个拓扑流形 X 和 Y **同伦等价**，如果它们之间存在**连续映射** f 与 g：

$$f: X \to Y, \quad g: Y \to X \tag{6.1.4}$$

而且 $g \cdot f$ 与 X 上的恒等映射同伦，$f \cdot g$ 与 Y 上的恒等映射同伦。

注意 与恒等映射同伦并不一定就是恒等映射。

同伦等价又可称为**伦型**(Homotopy type)**相同**。

回顾定义 1.1.4，如果两个流形 X 和 Y 互相同胚，即 X 和 Y 有 1∶1 同胚映射关系，则 X 和 Y 必定**同伦等价(或称伦型相同)**。但反过来不一定对，即若是 X **和** Y **同伦等价，不一定** X **和** Y **是同胚流形**。例如，X 和 Y 可以有不同的维数。由此可见，流形的维数是拓扑不变的，但流形的伦型不一定是拓扑不变的，不过在这里我们将不讨论非拓扑不变的情况。

定义 6.1.4 设有两个流形 $X\supset Y$,若存在连续映射:

$$r: X\to Y$$
$$r(q)=q,\quad q\in Y \tag{6.1.5}$$

则称 $X\to Y$ 为 X 的收缩,称 r 为收缩映射。

定义 6.1.5 设已有收缩映射 r,同时又有如下的同伦映射:

$$X\otimes[0,1]\to X,\quad p\otimes\lambda\to F(p,\lambda),\lambda\in[0,1]$$

(i)$F(p,0)=p\in X$(X 上的恒等映射);

(ii)$F(p,1)=r(p)\in Y$(收缩映射);

(iii)$F(q,\lambda)=q(\forall q\in Y)$,

就称这种映射为流形 X 的形变收缩,包括

(i)$\lambda=0$ 时,X 不收缩;

(ii)$\lambda=1$ 时,X 收缩成 Y;

(iii)把 Y 从 X 中挑出来。

定义 6.1.6 与单个点$\{0\}$有相同伦型的流型 M 称为可缩流形,可缩流形是最简单的流形,被称为拓扑平庸流形,例如 R^n。

例 1 在 E^2 空间中取一个 2 维圆盘 D^2(D^2 是 E^3 空间中的 3 维实心球剖开后的剖面)。除去 D^2 的中心点,$D^2-\{0\}$就可以形变并收缩成一个 1 维的 S^1(圆环)。

$$D^2-\{0\}\cong S^1 \tag*{(6.1.6)$_1$}$$

与此类似,在 E^n 空间中取一个 n 维圆盘 D^n(D^n 是 E^{n+1}空间中的 $n+1$ 维实心球剖开后的剖"面")。除去 D^n 的中心点,$D^n-\{0\}$就可以形变并收缩成一个 $n-1$ 维的球面 S^{n-1}:

$$D^n-\{0\}\cong S^{n-1} \tag*{(6.1.6)$_2$}$$

§6.2 基本群 $\Pi_1(M, x_0)$

在实轴上取一个线段 $I=[0,1]$，再取连续映射 f，把 I 中的每一个点 1∶1 对应地连续映射到流形 M 上去：

$$\begin{aligned} f: I &\to M \\ x &\to f(x) \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

$f(x)$称为路径，它代表从 I 映射到 M 上的一段曲线。

定义 6.2.1 设有两个不同的路径 f_0 和 f_1。若能由其中的一个连续地变成另一个，就称这两个路径同伦：

$$f_0 \Leftrightarrow f_1 \tag{6.2.2}$$

如果 $f_0 \Leftrightarrow f_1$ 和 $f_1 \Leftrightarrow f_2$ 都成立，则容易验证 $f_0 \Leftrightarrow f_2$，因此，所有与 f 同伦的映射构成一个**等价的同伦类，记作**$[f]$。

若 f 的起点与 f 的终点都是 M 上的同一个点 x_0，则称 f 是一个以 x_0 为基点的环路：

$$f(0)=f(1)=x_0 \tag{6.2.3}$$

如果一个环路可以连续地变为另一个环路，并保持基点 x_0 不变，则称此两环路同伦等价。所有的与某一个环路同伦等价的环路的集合，构成一个相互等价的同伦类，也记作$[f]$，以图 6.2.1 为例，D_1 和 D_2 是 R^2 空间的两个区域。

D_1 中的以 x_0 为基点的所有环路（f 是其代表）都可以收缩到 x_0 点，即都与恒等映射（整个圈收缩到 x_0 点）属于同一个同伦等价类。

D_2 中的以 x_0 为基点的所有环路（f_1 和 f_2 是其代表）分两类：一类（以 f_1 为代表）可收缩到 x_0（与(a)图的 f 类似）；一类（以 f_2 为代表）不能收缩到 x_0，因为 D_2 有一个洞。事实上，(b)图中不仅 f_2

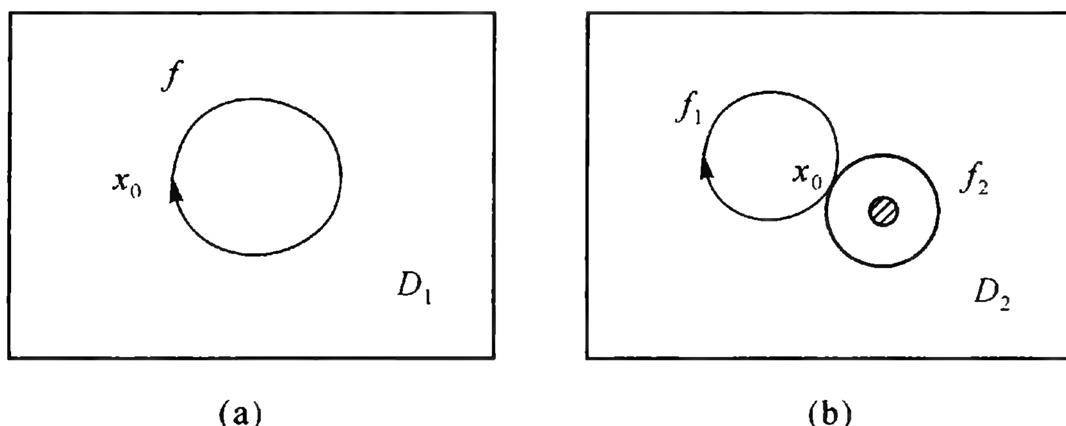


图 6.2.1

不能收缩到 x_0，还有绕洞 2,3,4,…圈的无穷多种环路和反方向绕洞 1,2,3,4,…圈的无穷多种环路，都不能收缩到 x_0，所以都与 f_1 不同伦。不仅如此，绕洞圈数不同和方向不同的环路也都是互不同伦的。

按照同伦类的语言，过基点 x_0 的所有封闭曲线可区分为若干同伦类 $\{f_i\}(i=1,2,\cdots)$。同伦类 $\{f_i\}$ 的集合记作 $\Pi_1(M,x_0)$。

定义 6.2.2 $\Pi_1(M,x_0)$ 称为**同伦群**，或称为流形 M 上的以 x_0 为基点的同伦群，又称为流形的**基本群**。

定义 6.2.3 在道路连通的 M 上，$\Pi_1(M,x_0)$ 在同构的情况下仅依赖于 M，与基点 x_0 的选择无关，所以又可以把流形 M 的基本群简写成 $\Pi_1(M)$。

在 $\Pi_1(M,x_0)$ 中一定包含一个恒同元素 $\{e\}$，它是常数映射的等价同伦类，常数映射的定义为

$$f(\lambda)=x \qquad \text{对所有的 } \lambda\in[0,1]$$

在 M 中所有能够连续地收缩到 x_0 一点的曲线都属于 $\{e\}$ 这个等价同伦类。例如，图 6.2.1(*a*)中的 f 属于 $\{e\}$，图 6.2.1(*b*)中的 f_1 也属于 $\{e\}$。

在 $\Pi_1(M,x_0)$ 中，除 $\{e\}$ 外还有哪些元素决定于 M 的拓扑性质。

例如在图 6.2.1 中，就要看 D_1，D_2 各有几个洞。

例　一般情况下，n 维线性实空间 R^n 上可引入如下的同伦映射 $F(x,\lambda)$：

$$x\in R^n \qquad \lambda\in[0,1]，基点取\ x_0\in R^n$$

同伦映射是

$$F(x,\lambda)\to\lambda x_0+(1-\lambda)f(x) \tag{6.2.4$_1$}$$

$$\lambda=0:\qquad F(x,0)=f(x)$$

$$\lambda=1:\qquad F(x,1)=x_0 \tag{6.2.4$_2$}$$

由于 $f(x)$ 是 x 的任意连续函数，R^n 中没有洞，所以在 R^n 中任意取一个 x_0 为基点的环路，经形变收缩后，必定都收缩到 x_0，从而 R^n 中的 $\{f_i\}$ 集合只能含有一个单位元素或恒同元素 $\{e\}$（identity element）。

我们再考察同伦群的元素的乘法。

定义 6.2.4　基本群 $\Pi_1(M,x_0)$ 中两个元素 $\{f_i\}$ 和 $\{f_j\}$ 的乘积定义为由 x_0 出发，沿路径 $f_i(\lambda)$ 绕一圈后回到 x_0，再沿路径 $f_j(\lambda)$ 绕一圈后回到 x_0（见图 6.2.2），所构成的闭曲线的同伦类记作

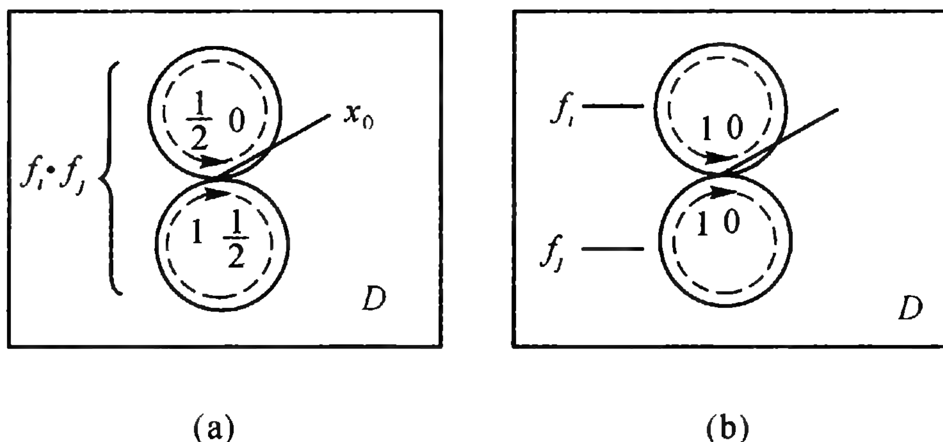


图 6.2.2

(a) $f_i\cdot f_j$ 仍是一个以 x_0 为基点的连续映射环路，而且是一个乘积环路

(b) $f_i(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 和 $f_j(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 是两个互相独立的环路，不是乘积环路

$$\{f_i\} * \{f_j\} = \{f_i \cdot f_j\} \tag{6.2.5$_1$}$$

即

$$\{f_i \cdot f_j\}(\lambda) = \begin{cases} f_i(2\lambda) & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2} \\ f_j(2\lambda - 1) & \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{cases} \tag{6.2.5$_2$}$$

还可定义 f^{-1} 的环路。$f^{-1}(\lambda)$ 的环路与 $f(\lambda)$ 的环路方向相反（见图 6.2.3）。

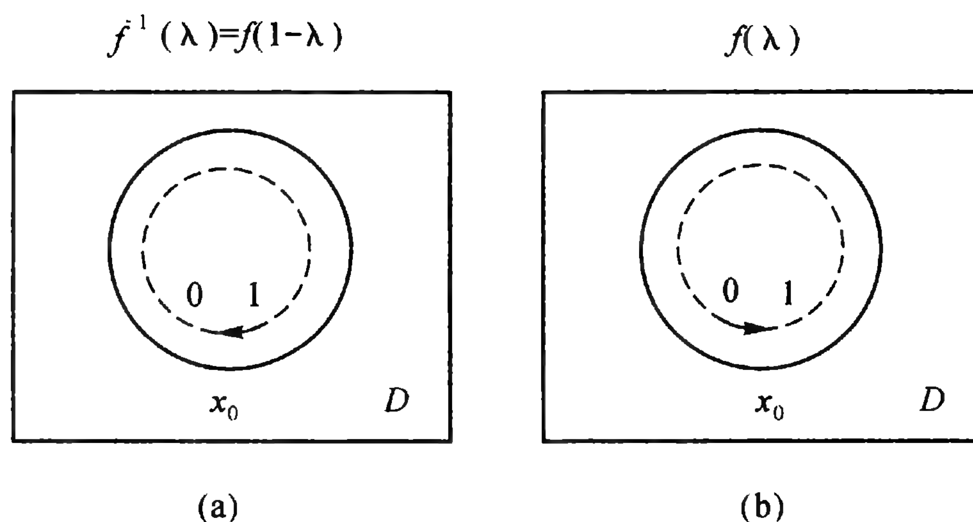


图 6.2.3

定义 6.2.5 同伦类$\{f\}^{-1} \equiv \{f^{-1}\}$。 (6.2.6)

按乘法定义，$(f \cdot f^{-1})(\lambda)$ 的环路正好是从 x_0 出发，转一圈到 x_0，又循原路回到 x_0，所以它同伦于恒等映射，从而

$$\{f\} * \{f^{-1}\} = \{e\} \tag{6.2.7}$$

由此还可证明

$$\{f_i\} * (\{f_j\} * \{f_k\}) = (\{f_i\} * \{f_j\}) * \{f_k\} \tag{6.2.8}$$

即$\{f_i\}$满足结合律。

归纳起来，同伦类$\{f_i\}$既有乘法，又有逆元素$\{f_i^{-1}\}$和恒等元$\{e\}$，还有结合律，所以同伦类$\{f_i\}$的集合确实构成一个群，即**同伦群**

(见定义 6.2.2)$\Pi_1(M,x_0)$或 $\Pi_1(M)$。

例 1　如果流形 M 上的任意两点都可以用一条在 M 上的曲线连接起来,就称这个流形 M 为**道路连通流形**。如果 M 的基本群 $\Pi_1(M,x_0)$平庸(即只有一个恒等元$\{e\}$是群元素),就称 M 是单连通的流形。

因为 E^n(n 维欧氏空间)和 S^n($n\geqslant 2$ 的 n 维球)的基本群 $\Pi_1(M,x_0)$都是平庸的(只有恒等元$\{e\}$一个元素),所以 E^n 和 S^n($n\geqslant 2$ 的 n 维球)都是单连通流形,单连通流形上的任何回路都可以收缩到一个点,但 E^n 和 S^n 并不拓扑同胚。

例 2　如图 6.2.4 所示,环面上任何两点都可以用一条在环面上的曲线连接,所以环面也是道路连通流形。但是在环面上的环路并不是都能收缩到一个点,可见基本群 $\Pi_1(T^2,x_0)$并不是只有恒等元$\{e\}$一个元素,它必定还有路径不能收缩到一个点的群元素(同伦类),所以该环面不是单连通流形。

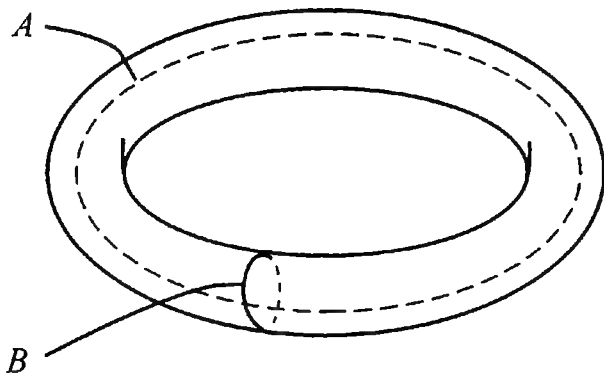


图 6.2.4

例 3　S^1 的情况与上述环面类似,基本群 $\Pi_1(S^1,x_0)$并不是只有恒等元$\{e\}$一个元素,所以也不是单连通流形。

§6.3　同伦群的结构与同态序列

如果 G_1 群的结构与 G_2 群的结构之间有确定的对应关系,就称

G_1 与 G_2 **相互同态对应**(homomorphic)：

$$f: G_1 \to G_2 \tag{6.3.1}$$

若 G_1 中有一组元素在 f 的作用下都映射到 G_2 的单位元素(unit element) e 上，则这一组元素称为 f 的核，记作 $\mathrm{Ker}f$：

$$\mathrm{Ker}f = \{g \in G_1 \mid f(g) = e \in G_2\} \tag{6.3.2}$$

把同态映射(homomorphic mapping)的象(image)记作 $\mathrm{Imag}f$，则有如下定义：

$$\mathrm{Imag}f = \{g' \in G_2 \mid g' = f(g), g \in G_1\} \tag{6.3.3}$$

注意 $\mathrm{Imag}f$ 一般并不包含 G_2 的全体。

讨论 1 在集合 G_1 的子集 $\mathrm{Ker}f$ 中，任意取两个不同的元素 g_0 和 g_0'。另外，在 G_1 中再任意取一个元素 g(g 不一定在 $\mathrm{Ker}f$ 之中)，则经过 f 映射后，必有如下结果(如图 6.3.1)：

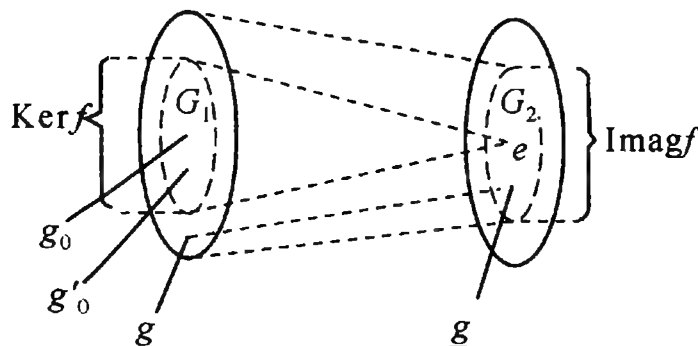


图 6.3.1

f：

$$G_1 \to \mathrm{Imag}f \in G_2$$

$$g_0 \to e \in \mathrm{Imag}f$$

$$g_0' \to e \in \mathrm{Imag}f$$

$$g \to \underline{g} \in \mathrm{Imag}f$$

$$g^{-1} \to \underline{g}^{-1} \in \mathrm{Imag}f$$

$$g g_0 g^{-1} \to \underline{g} e \underline{g}^{-1} = e \in \mathrm{Imag}f$$

所以 $$g g_0 g^{-1} \in \mathrm{Ker}f$$

由此可见，$\mathrm{Ker}f$ 中的所有元素 $g_0, g_0', g_0'', \cdots$ 的集合构成 G_1 中

的一个不变子群，记作 s。在 G_1 中任取一个元素 g，s 都有如下性质：

$$gsg^{-1}=s$$

由此得知，$G_1/\mathrm{Ker}f$ 与 $\mathrm{Imag}f/e$ 同构：

$$\frac{G_1}{\mathrm{Ker}f}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{Imag}f}{e}\Leftrightarrow\mathrm{Imag}f \tag{6.3.4}$$

讨论2　设 $G_k(k=1,2,\cdots)$ 为群的序列，相邻的 G_k 与 G_{k+1} 之间存在同态对应 f_k，

$$f_k : G_k \rightarrow G_{k+1}$$

可以用如下形式把这个序列的内在联系表示出来：

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

一般情况下：

$$\mathrm{Imag}f_1 \leqslant G_2,\quad \mathrm{Imag}f_2 \leqslant G_3,\quad \cdots,\quad \mathrm{Imag}f_k \leqslant G_{k+1},\quad \cdots$$

但在 $\mathrm{Imag}f_k=\mathrm{Ker}f_{k+1}$ 的特殊情况下，这个**同态序列** G_k 称为**恰当序列**。

以下证明恰当序列的两个定理。

定理6.3.1　设有 e, G_1, G_2, e 四个群组成恰当序列如图6.3.2所示。

其中 O 是只有一个恒等元 e 的平庸群，则 G_1 中的元素与 G_2 中的元素就必定1∶1对应(即同构对应)。

证明　由于 $\mathrm{Imag}f_0=\mathrm{Ker}f_1=e$，所以 G_1 中的元素只有一个 e 映射到 G_2 中的 e，也即 $f_1\cdot e=e$，由此得知 f_1 本身就相当于 $f_1 \cong e$，从而 G_1 与 G_2 1∶1对应(同构对应)。　　证毕。

定理6.3.2　设有下列五个群组成的恰当序列，则 G_3 同构于 G_2/G_1，即 G_1 必为 G_2 的不变子群，而且商群 G_2/G_1 与 G_3 同构。

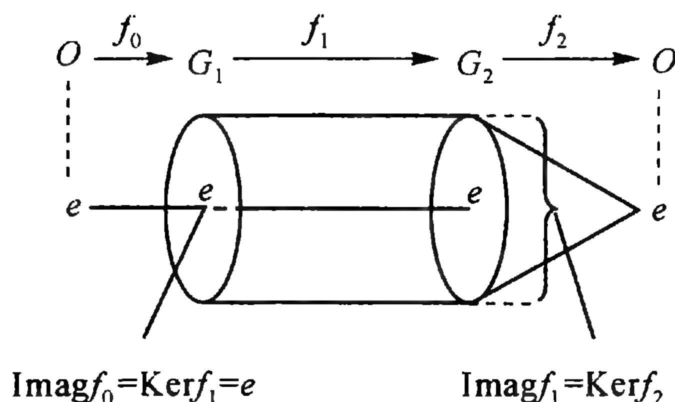


图 6.3.2

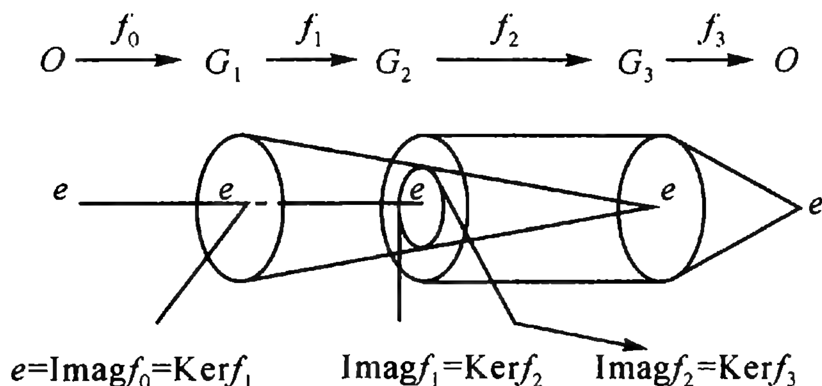


图 6.3.3

证明 根据定理 6.3.1，前一部分是 $e \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2$（如图 6.3.3）。在 $\text{Ker}f_1=\text{Imag}f_0=e$ 的情况下，同态映射 $G_1 \xrightarrow{f_1} G_2$ （$\text{Imag}f_1=\text{Ker}f_2$ 部分）为 1∶1 对应映射，即 G_1 为 G_2 的一个子群：

$$G_1 \subset G_2$$

又 $G_1 \Leftrightarrow \text{Imag}f_1=\text{Ker}f_2$，按照讨论 1 的分析，$\text{Ker}f_2$ 中的所有元素的集合构成 G_2 中的一个不变子群，也即 **G_1 的集合为 G_2 的不变子群**。

同时，$\text{Imag}f_2=\text{Ker}f_3=G_3$，所以 $G_2 \xrightarrow{f_2} G_3$ 为满映射。

由于 G_1 是 G_2 的不变子群，对应于 G_2 的恒等元，所以从图 6.3.3 立刻看到：

$$G_2/G_1 \overset{\text{同构}}{\Leftrightarrow} G_3/e \overset{\text{同构}}{\Leftrightarrow} G_3。$$

证毕。

恰当序列可用来表达同伦群的某些性质和结构。为此我们先举两个同伦群的例子。

例 1　$\Pi_1(S^1)=\Pi_1(E^1/z,x_0)\cong z$　(6.3.5)

$\Pi_1(S^1)$只有一种回路 S^1，z 是整数，它表示绕圈(因为 S^1 是一个圆)整数次，E^1 是一维欧氏空间，把绕圈 z 次的路径拉直，就成为 E^1 中的一部分，所以 E^1 中包括了 $z=0,1,2,\cdots$。这 $0,1,2,\cdots$代表了同伦群 $\Pi_1(S^1)=\Pi_1(E^1/z,x_0)$中不同的群元，所以(6.3.5)式右方写为$\cong z$。

x_0 是同伦群中的环路的基点。

$\Pi_1(S^1)$的元素 e 就是 $z=0$。

例 2　$\Pi_1(T^2)=\Pi_1(E^2/z\oplus z)\cong z\oplus z$　(6.3.6)

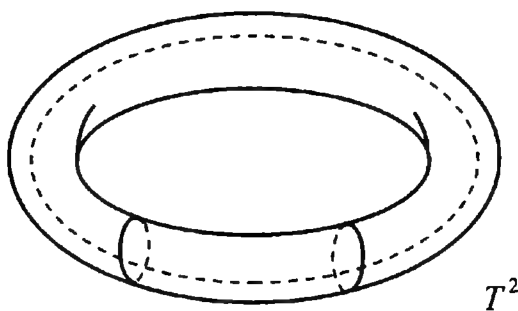


图 6.3.4

T^2 是一个环面(如图 6.3.4)，它上面的两种回路的不同绕圈方式可以用 $z\oplus z$ 来代表，这两种方式的绕圈次数都是整数 z。E^2 是 2 维欧氏空间。若把 $z\oplus z$ 的两种方式的绕圈路径分别沿不同的方向推开，并按照绕圈的先后联接起来，就成为 E^2 的 2 维欧氏空间(平面)上的由若干横线和竖线连接而成的一条路径。

把这两个例子综合一下，就得到：

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1(S^1)=\Pi_1(E^1/z,x_0)\\ \Pi_1(T^2)=\Pi_1(T^2/z\oplus z,x_0)\end{array}\right\}\Pi_1(M/z,x_0) \qquad (6.3.7)$$

在取 $\Pi_1(S^1)=\Pi_1(E^1/z,x_0)$时，当

$z=0,\Pi_1(E^1/0,x_0)\Leftrightarrow$幺元素 e，对应于 x_0 点；

$z=1,\Pi_1(E^1/1,x_0)\Leftrightarrow$绕 S^1 1 圈；

⋮

$z=k, \Pi_1(E^1/k, x_0) \Leftrightarrow$绕 S^1 k 圈。

在取 $\Pi_1(T^2)=\Pi_1(T^2/z\oplus z, x_0)$时，当

$z\oplus z=0\oplus 0, \Pi_1(E^2/0\oplus 0, x_0) \Leftrightarrow$ 幺元素 e，对应于 x_0 点；

$z\oplus z=m\oplus n, \Pi_1(E^2/m\oplus n, x_0) \Leftrightarrow$ 一条路径：第一种回路绕 m 圈；第二种回路绕 n 圈。

由此看到，可以定义一个群 G_{x_0}，它作用在整数群 $z, z\oplus z, z\oplus z\oplus z, \cdots$ 上，作用的特点与迷向子群有一些类似：

$$\left.\begin{aligned}
&G_{x_0} z(z\Rightarrow 0)\Rightarrow \text{幺元素 } e\text{，对应于 } x_0 \text{ 点；}\\
&G_{x_0} z\oplus z(z\oplus z\Rightarrow 0\oplus 0)\Rightarrow \text{幺元素 } e\text{，对应于 } x_0 \text{ 点；}\\
&\vdots\\
&G_{x_0} z(z\neq 0)=0\\
&G_{x_0} z\oplus z(z\oplus z\neq 0\oplus 0)=0\\
&G_{x_0} z(z\neq 0)=0\\
&G_{x_0} z\oplus z(z\oplus z\neq 0\oplus 0)=0\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.8}$$

由于 G_{x_0} 具有(6.3.8)式的特殊性质，所以整个 G_{x_0} 群与 $\Pi_1(M/G, x_0)$的幺元素 e(对应于 x_0 点)对应，从而有如下的恰当序列(如图 6.3.5)。

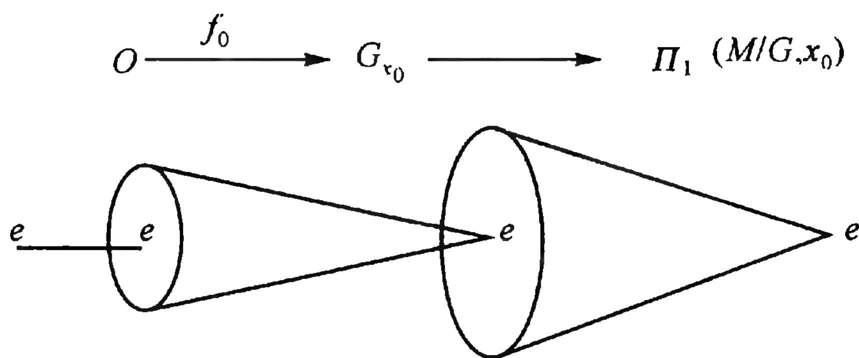


图 6.3.5

同时，由于 G(包括群元 $z, z\oplus z, \cdots$)对于 $\Pi_1(M/G, x_0)$(也包括 $z, z\oplus z, \cdots$)是满映射，而且 G 中的 $z=0, z\oplus z=0\oplus 0, \cdots$都是映射到

$\Pi_1(M/G,x_0)$中的 e(对应于 x_0),所以又有如下的序列(如图 6.3.6)

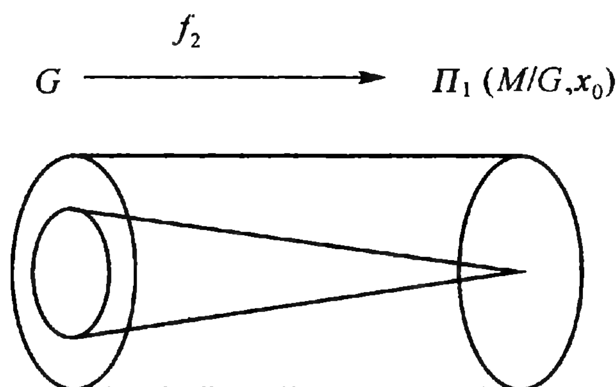


图 6.3.6

把图 6.3.5 和图 6.3.6 叠合在一起,就得到与图 6.3.3 类型相

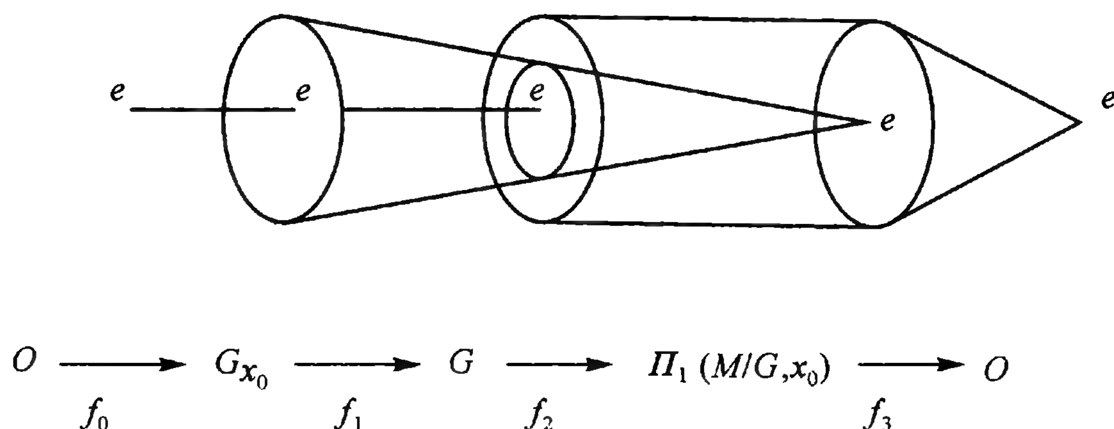


图 6.3.7

同的图 6.3.7。它和图 6.3.3 一样,也是一个恰当序列,表明:

(1) G_{x_0} 与 $\text{Imag}f_1$ 1∶1 对应,群元素是

$$z=0,\quad z\oplus z=0\oplus 0,\quad z\oplus z\oplus z=0\oplus 0\oplus 0,\cdots$$

(2) G_{x_0} 与 $\Pi_1(M/G,x_0)$的恒等元$\{e\}$同态对应,并且

$$\text{Imag}f_1=\text{Ker}f_2;$$

(3) $\Pi_1(M/G,x_0)$基本群同 G 群($z,z\oplus z,z\oplus z\oplus z,\cdots$)有满射关系;

(4) $\Pi_1(M/G,x_0)\Leftrightarrow G/G_{x_0}$(根据定理 6.3.2)。

§6.4 高阶同伦群

一阶同伦群 $\Pi_1(M)$（此处略去 x_0，因为 $\Pi_1(M,x_0)$ 的性质与 x_0 的位置无关）适用于研究二维曲面上的同伦性质。若是基本群非平庸，则二维曲面上必定有洞。但是，对于高维流形（$n>2$），就必须引入高阶同伦群，否则就无从区分 n 维欧氏空间 E^n 和 n 维球 $S^n \cong D^{n+1}-\{0\}$。

$k(k>1)$ 阶同伦群记作 $\Pi_k(M,x_0)$（和一阶同伦群一样，也可以把 x_0 略去），它是由（以 x_0 为基点的）k 维环路同伦映射等价类集合组成的群。

二维环路 设 I^2 为二维实数空间中的单位方块，可写成 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1(\lambda_i=\lambda_1,\lambda_2)$。

通过如下的步骤，就能够得到一个二维环路（与球面拓扑等价），如图 6.4.1。由 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \quad (i=1,2)$ 出发，显见二维环路是一个封闭的袋，拓扑性质与 S^2 相同。

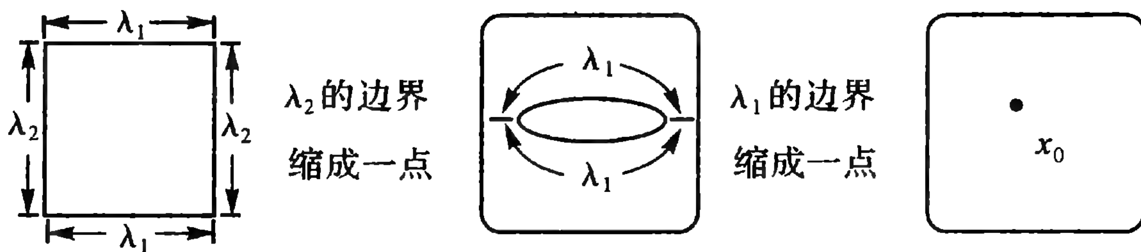


图 6.4.1

n 维环路是 2 维环路向 n 维的推广。

设 I^n 为 n 维实数空间中的单位方块 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$，依次使 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的边界都缩成一点，就形成一个 n 维环路——n 维的封闭的袋，拓扑性质与 S^n 相同。在这个 n 维环路上也有一个 x_0 点，即

$$f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=x_0 \qquad \text{当 } \lambda_i=0 \quad \lambda_i=1(i=1,2,\cdots,n)$$

n 维环路的乘法　若 $f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 与 $g(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是两个 n 维环路的映射，则 $h=f\cdot g$ 定义为：

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\equiv\begin{cases} f(2\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \\ \qquad 0\leqslant\lambda_1\leqslant\dfrac{1}{2}(0\leqslant 2\lambda_1\leqslant 1) \\ g(2\lambda_1-1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \\ \qquad \dfrac{1}{2}\leqslant\lambda_1\leqslant 1 \quad (0\leqslant 2\lambda_1-1\leqslant 1) \end{cases} \tag{6.4.1}$$

举一个 $n=2$ 的例子。

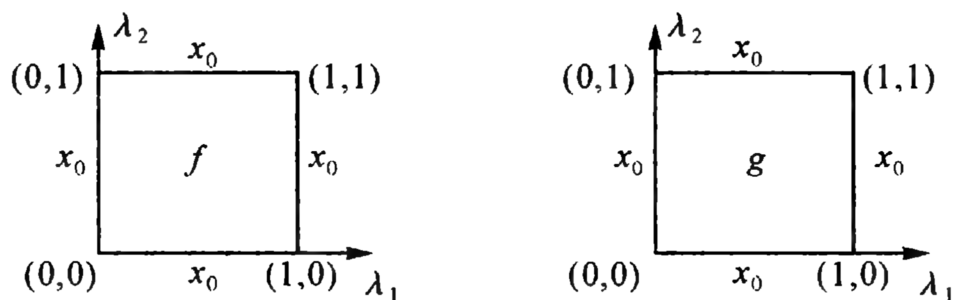


图 6.4.2

$(i,j)=(\lambda_1,\lambda_2),0\leqslant\lambda_1\leqslant 1,0\leqslant\lambda_2\leqslant 1$

图 6.4.2 中标有 x_0 的 4 条边全都要缩合成为一个点 x_0，(i,j) 则是 I^2(2 维方块)的各个顶点的坐标。

按照式(6.4.1)的乘法规则，$h=f\cdot g$ 可用图 6.4.3 表示。

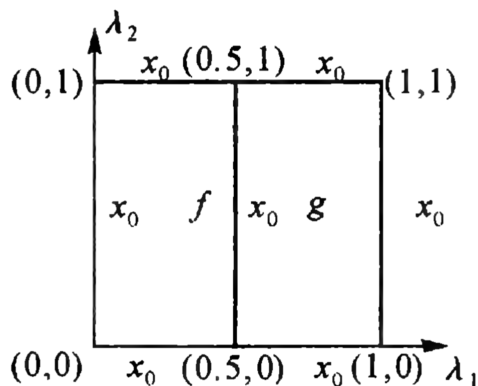


图 6.4.3

图中$(i,j)=(\lambda_1,\lambda_2)$仍是各顶点的坐标：

$$f: \qquad\qquad g:$$

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\leqslant\lambda_1\leqslant 1$$

$$h(\lambda_1,\lambda_2)\equiv f\cdot g(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$\equiv\begin{cases} f(2\lambda_1,\lambda_2) & (0\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{1}{2}) \\ g(2\lambda_1-1,\lambda_2) & (\frac{1}{2}\leqslant\lambda_1\leqslant 1) \end{cases} \tag{6.4.2}$$

由上述乘法规则，又可以定义 f^{-1}：

$$f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2)=f(1-\lambda_1,\lambda_2) \qquad (0\leqslant\lambda_1\leqslant 1) \tag{6.4.3}$$

于是有（类似式(6.4.2)）：

$$f\cdot f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2)\equiv\begin{cases} f(2\lambda_1,\lambda_2) & (0\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{1}{2}) \\ f^{-1}(2\lambda_1-1,\lambda_2) & (\frac{1}{2}\leqslant\lambda_1\leqslant 1) \end{cases}$$

根据式 6.4.3f^{-1}的定义，

$$f\cdot f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2)\equiv\begin{cases} f(2\lambda_1,\lambda_2) & (0\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{1}{2}) \\ f(2-2\lambda_1,\lambda_2) & (\frac{1}{2}\leqslant\lambda_1\leqslant 1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(0,\lambda_2)\to f(1,\lambda_2) \\ f(1,\lambda_2)\to f(0,\lambda_2) \end{cases} \tag{6.4.4}$$

可见，$f\cdot f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2)$的作用是：首先 f 起作用，λ_1 由 0 走到 1；然后 f^{-1}起作用，λ_1 又由 1 回到 0，所以 $f\cdot f^{-1}$为 2 维同伦群中的恒等元 I。

在 $n>2$ 时，以上关于 $f\cdot g$ 乘法的定义和 f^{-1}的定义也都是适用的。

如果一个 n 维环路可以连续地变为另一个 n 维环路（x_0 保持不

变),则这两个环路为同伦等价。和1维环路的情况一样,$n>1$ 时同样可以用 $\{f\}$ 代表 n 维环路 f 的同伦等价类。

在以 x_0 为基点的 n 维环路同伦等价类的集合中,同样可以定义 n 维同伦等价类的乘法:

$$\{f\}\cdot\{g\}=\{f\cdot g\} \tag{6.4.5$_1$}$$

$$\{f\}\cdot\{f^{-1}\}=\{f\cdot f^{-1}\}=\{e\} \tag{6.4.5$_2$}$$

由于乘法(6.4.5)$_1$ 和 $\{f\}^{-1}=\{f^{-1}\}$,所以 n 维同伦等价类(简称同伦类)也形成群,叫做基点 x_0 的 n 阶同伦群 $\Pi_n(M,x_0)$。

基本群 $\Pi_1(M,x_0)$ 可能是 Abel 群(如果2维的 M 上没有洞),也可能是非 Abel 群(如果2维的 M 上有2维的洞)。

$k\geqslant 2$ 的高阶同伦群的 $\Pi_k(M,x_0)$ 必为 Abel 群,因为 $k\geqslant 2$ 时,k 维环路的边界是连通的,可以通过连续畸变使得 $\{f\}\cdot\{g\}$ 置换成 $\{g\}\cdot\{f\}$,不会受到 $k+1$ 维的洞的阻挡(详细证明略去)。

§6.5 n 维球 S^n 的同伦群

以下简单介绍一下同伦群 $\Pi_k(S^n)$ 的几个有趣的性质(式(6.5.1),(6.5.2),(6.5.3)):

$$\Pi_n(S^n)=z \tag{6.5.1}$$

n 维环路可以覆盖 S^n 任意整数次,所以每一个同伦类对应一个整数。同伦群 $\Pi_n(S^n)$ 应是一个整数群 z。

$$\Pi_k(S^n)=0 \quad (k<n) \tag{6.5.2}$$

S^n 只有一个 $n+1$ 维的洞,洞的边缘就是 n 维的 S^n。若 $k<n$,则 k 维环路根本不可能裹住 $n+1$ 维的洞(也就是不可能覆盖 S^n)。所以 S^n 上的 k 维环路必定可连续缩成一点,所以(6.5.2)式成立。

例 $SU(2)\Leftrightarrow S^3$,根据以上1,2两性质,

$$\Pi_3(SU(2))=z,\Pi_2(SU(2))=0,\Pi_1(SU(2))=0$$

$$\Pi_k(S^1)=0 \quad (k>1) \tag{6.5.3}$$

S^1 可以包裹的是一个 2 维的洞，$S^k(k>1)$可以包裹的是一个 $k+1$ 维的洞。S^k 与 I^k 同伦（见图 6.4.1 和图 6.4.2 中 $k=2$ 的例子）。但 $I^k(k\neq1)$与 S^1 不同伦，所以 I^k 不能包裹 2 维的洞（2 维洞的边缘是 S^1）。

如果一定要把 I^k 映射到与 I^k 不同伦的 S^1 上，则只有一个可能性，就是 I^k 全体映射到 S^1 上的某一个点 x_0，同时 S^1 也全部收缩到这一个点 x_0。这时 S^1 已不存在，所以 $\Pi_k(S^1)=0$（0 代表一个只有恒等元的平庸群）。

第 7 章 同调论与 de Rham 上同调论

§7.1 整同调群

设有一个 n 维欧氏空间 R^n,它上面的每一个点的坐标都可写成 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。作一个映射:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_n,0) \tag{7.1.1}$$

就看到可以把 R^n 看作是 R^{n+1} 中的一个子空间。

举几个最简单的例子,如图 7.1.1。

推广到 R^k,有 k 个坐标 $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k)$,可取 k 个矢量:

$$\begin{aligned}x_1&=(1,0,0,\cdots,0)\\x_2&=(0,1,0,\cdots,0)\\&\vdots\\x_k&=(0,0,0,\cdots,1)\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

根据图 7.1.1(a),(b),(c),在 $k=0,1,2$ 时,可以证明 $R^k(k=0,1,2)$ 上的流形按照(7.1.1)式映射到 R^{k+1} 上的结果可以表达为(取 $x_0=(0,0,0,\cdots,0)$):

$$R^k\rightarrow R^{k+1}$$

$$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\rightarrow\left\{\sum_{j=0}^{k}t_jx_j\in R^{k+1}\,\middle|\,\sum_{j=0}^{k}t_j=1,t_j\geqslant0\right\}$$

对照图 7.1.1(c),$t_0=1$ 代表 R^{k+1} 的 O 点。;$t_0=0$ 代表 (x_1,x_2,x_3) 平面;$0<t_0<1$ 代表与 (x_1,x_2,x_3) 平面平行的更靠近 O 点的平面。

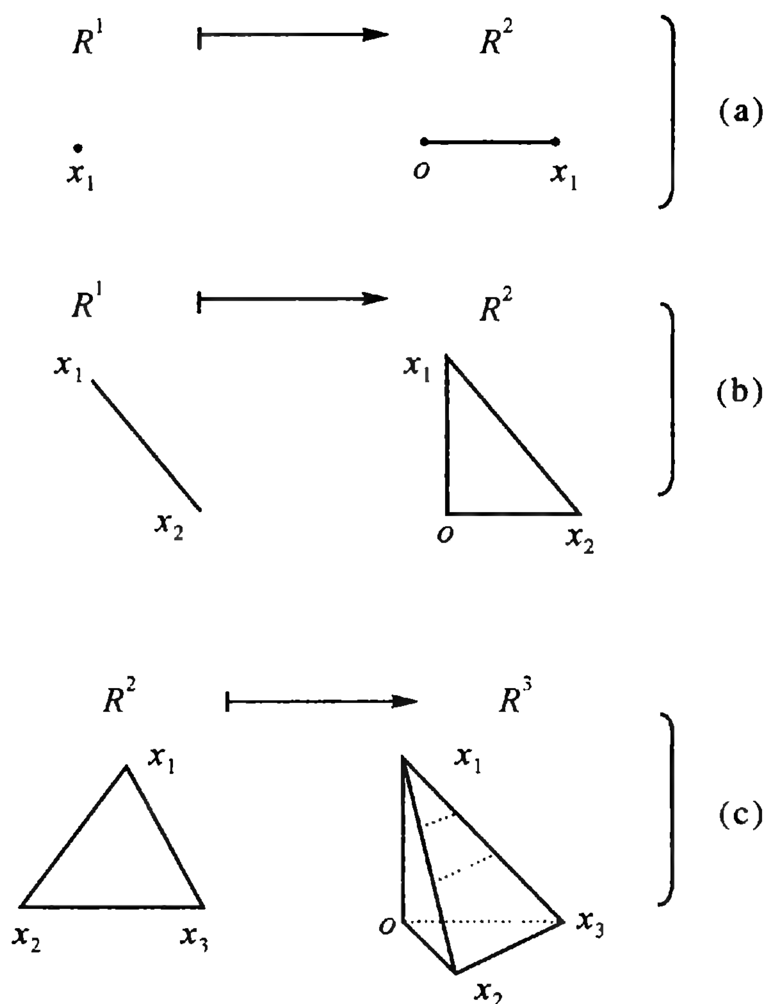


图 7.1.1

定义 7.1.1 以下的 Δ_k 称为标准 k-单形（在 k 维空间）：

$$\Delta_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k} t_j x_j \in R^{k+1} \,\middle|\, \sum_{j=0}^{k} t_j = 1, t_j \geqslant 0 \right\} \tag{7.1.3}$$

这里 R^{k+1} 的 k 已不限于 0,1,2,它可包括 0 和所有的正整数。式(7.1.2)的 k 个点再加上 $x_0=(0,0,0,\cdots,0)$，就是标准 k-单形 Δ_k 中的$(k+1)$个顶点。

Δ_k 也可以用顶点$\{v_i\}$来表示：

$$\Delta_k = [v_0, v_1, \cdots, v_k] = \mathrm{Sign}(p)[v_{p_0}, v_{p_1}, \cdots, v_{p_k}] \tag{7.1.4}$$

Sign(p)中的 p 代表 $v_{p_0}, v_{p_1}, \cdots, v_p$ 的次序。$p \in p(k)$，这个 $p(k)$是 k 阶置换群：

$$\mathrm{Sign}(p)=\begin{cases}+1 & p\text{ 为偶置换}\\ -1 & p\text{ 为奇置换}\end{cases}$$

例如 $v_{p_0}v_{p_1}\cdots v_{p_k}\rightarrow v_{p_k}v_{p_{k-1}}\cdots v_{p_1}v_{p_0}$，就取

$$\mathrm{Sign}(p)=(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

设有流形 M，维数 $>k$，把 Δ_k 同胚映射到 M 上，就得到 M 上的 k 维有向子流形。同胚映射到 M 上的象 σ_k 可表示为

$$\Phi:\quad \Delta_k\rightarrow\sigma_k\subset M \tag{7.1.5}$$

σ_k 称为流形 M 上的**连续 k-单形**。可以仍由其中 $k+1$ 个顶点 $\{v_i\}$ 表示如下：

$$\sigma_k=[v_0,v_1,\cdots,v_k]\subset M \tag{7.1.6}$$

1. 连续 k-链

流形 M 的连续 k-链是流形 M 中的连续 k-单形的整系数线性组合：

$$c_k=\sum_i a_i\sigma_k^i \qquad a_i\in z \tag{7.1.7}$$

流形 M 上连续 k-链的集合记作

$$C_k(M)=\{c_k\} \tag{7.1.8}$$

对于每个 k-单形均有两种取向，记作 $\pm\sigma_k$：

$$\sigma_k+(-\sigma_k)=0$$

$$a\sigma_k+b\sigma_k=(a+b)\sigma_k$$

$$a(-\sigma_k)=-a\sigma_k \qquad a,b\in z \tag{7.1.9}$$

集合 $\{c_k\}$ 与这些加法运算合起来，形成 Abel 群。

2. 边缘算子 ∂

∂ 使得每一个 k-单形映射到它的边缘的 $(k-1)$-单形。例如利用式(7.1.6)：

$$\begin{aligned}\partial\sigma_k &= \partial[v_0, v_1, \cdots, v_k] \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n] \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

$$\partial\sigma_k \in C_{k-1}(M) \qquad (\text{见式}(7.1.8))$$

其中 $\hat{v}_i$ 上的符号^表示将顶点 v_i 抹去。例如：

$$\partial\sigma_0 = 0 \quad (\text{零维链只有一个 } v_0)$$

$$\partial\sigma_1 = v_1 - v_0$$

$$\partial\sigma_2 = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

∂作用在任意 k 链上仍保持链群的加法运算：

$$\partial C_k = \partial(\sum_i a_i \sigma_k^i) = \sum_i a_i (\partial\sigma_k^i) \in C_{k-1}(M) \tag{7.1.11}$$

从式(7.1.11)看到，∂是链群 $C_k(M)$ 与 $C_{k-1}(M)$之间的同态算子。

$$\partial:\ C_k(M) \to C_{k-1}(M) \tag{7.1.12}$$

3. $C_k(M)$的两个子群

(1) 边缘同态的核是一个子群，定义为：

$$Z_k(M) = \{c_k; \partial c_k = 0\} \tag{7.1.13}$$

满足$\partial c_k = 0$ 的 c_k 称为 k 闭链，Z_k 是一个 k 闭链群。

(2) 边缘同态的象也是一个子群，定义为：

$$B_k(M) = \{b_k = \partial c_{k+1} \mid c_{k+1} \in C_{k+1}(M)\} \tag{7.1.14}$$

$b_k = \partial c_{k+1}$称为边缘链，B_k 是一个 k 边缘链群。

以下证明$\partial \cdot \partial = 0$。任取一个 k-单形

$$\sigma_k = [v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k]$$

则

$$\begin{aligned}\partial \cdot \partial\sigma_k &= \partial(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_k]) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_k]\end{aligned}$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j}[v_0, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_k] + \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1}[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_k] \overset{i,j\text{对称}}{=\!=} 0$$

证毕

所以边缘链必为闭链，从而 B_k 必为 Z_k 的子群：

$$B_k \subset Z_k \tag{7.1.15}$$

而且 B_k 和 Z_k 都是 Abel 子群。

4. 不变子群

设 b_q 是 $B_k(M)$ 的一个群元，c_k 是 $Z_k(M)$ 的一个群元，而且每一个 $b_q \in B_k(M)$ 都满足

$$c_k \cdot b_q \cdot c_k^{-1} \in B_k(M) \tag{7.1.16}$$

则 $B_k(M)$ 称为 $Z_k(M)$ 的不变子群。

在 $B_k(M)$ 和 $Z_k(M)$ 都是 Abel 群的情况下，乘号"·"应改成加号"+"，$c_k^{-1} = -c_k$，所以如果 $b_q \in B_k(M)$，则必定有

$$c_k + b_q - c_k = b_q \in B_k(M)$$

满足式(7.1.16)。这就说明了 Abel 群 $B_k(M)$ 是 Abel 群 $Z_k(M)$ 的不变子群。

5. 商群

如果 $B_k(M)$ 是 $Z_k(M)$ 的一个不变子群，如果 $c_i \in Z_k(M)$，$c_j \in Z_k(M)$，而且

$$(c_i \cdot B_k(M)) \cdot (c_j \cdot B_k(M)) = (c_i \cdot c_j) \cdot Z_k(M) \tag{7.1.17$_1$}$$

则 $Z_k(M)/B_k(M)$ 也是一个群，称为商群，在 $B_k(M)$ 和 $Z_k(M)$ 都是 Abel 群的情况下，乘号改为加号，式(7.1.17)应该写成

$$(c_i+B_k(M))+(c_j+B_k(M))=(c_i+c_j)+Z_k(M) \tag{7.1.17)$_2$}$$

由于式(7.1.13)定义的 $Z_k(M)$和(7.1.14)定义的 $B_k(M)$满足(7.1.17)$_2$ 的条件,所以我们可以用 Abel 群 $Z_k(M)$和 $B_k(M)$定义一个商群 $H_k(M)$:

$$H_k(M)=Z_k(M)/B_k(M) \tag{7.1.18}$$

称 $H_k(M)$为流形 M 的 k-同调群。

6. 同调群

同调群 H_k 为 k-闭链的等价类(相差一个边缘链)的集合。就是说,如果两个 k-闭链 c_k^1 和 c_k^2 之间相差一个边缘链

$$c_k^1-c_k^2\in B_k(M) \qquad (7.1.19)_1$$

则称此两闭链 c_k^1 和 c_k^2 等价。

$$c_k^1\Leftrightarrow c_k^2 \qquad (7.1.19)_2$$

这种等价关系称为同调,即 c_k^1 与 c_k^2 互相同调,属于同一个同调类,记作$\langle Z_k\rangle$。

在同调群 H_k 中,非平庸 k-闭链(即这个闭链 c_k 满足$\partial c_k=0$,但它**不是边缘链**∂c_{k+1})是绕$(k+1)$维洞的 k 维子流形。不绕洞的 k-闭链包裹的是一个实心的 $k+1$ 维流形 N,所以它可以写成∂c_{k+1},必定**是边缘链**。

在 $Z_k(M)$中,包括了紧贴$(k+1)$维洞的 k-闭链,它是非平庸的。也包括了这个 k-闭链与各种边缘链之和,也是非平庸的。它们同紧贴$(k+1)$维洞的 k-闭链属于同一个同调等价类 $Z_k(M)$(它们也是相互同伦的)。

如果一个同调等价类 $Z_k(M)$中**所有的 k-链**都是∂c_{k+1}型的,由于∂c_{k+1}与 0-链的差别也是一个边缘链∂c_{k+1},所以∂c_{k+1}必与 0-链属于同一个同调等价类。在这种情况下,M 中不存在$(k+1)$维的洞,

$H_k(M)$中只有 0 元素。

设流形 M 与 N 相互同胚，存在同胚映射 f，则有

$$f: M \to N$$

由于同胚映射算子 f 与边缘算子∂可对易，所以又得

$$f\partial M = \partial f M = \partial N$$

可见相互同胚的流形 M 和 N 具有相互在同胚映射下等价的边缘链群。从而 M 和 N 的同调群也是相互同构的。所以说，**相互同胚的流形具有相同的同调群。**

流形 M 上的同调群 $H_k(M)$的每一个生成元都是一个绕$(k+1)$维洞的 k 维子流形的同伦等价类，它是形变收缩不变的。所以，具有相同伦型的任意两个流形的同调群都是相互同构的，这一事实反映了同伦群与同调群之间的内在联系。

例 1 R^n 是一个内部没有洞的可以缩成单点的流形，所以它与单点 v_0 有相同的伦型，相应的同调群是

$$H_k(R^n) = H_k(v_0) = \begin{cases} z & k=0 \\ 0 & k=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{7.1.20}$$

例 2 在道路连通流形 M 中任意两个点 v_0, v_1 都可以用一维子流形($k=1$ 的单形)$\sigma_1=[v_0, v_1]$把它们连接起来，v_0, v_1 是两个 0-维子流形，它们的差别 $v_1 - v_0 = \partial[v_0, v_1]$正好是一个 0 维边缘链。所以按照式(7.1.19)和$(7.1.19)_1$ 的定义，v_0 和 v_1 是互相同调的，属于同一个同调类(0 维同调类)；而且，道路连通流形 M 中的任意另一个点 v'_1 也都与 v_0 同调，即道路连通流形 M 的 0 维同调群为

$$H_0(v_0) = H_0(v_1) = H_0(v'_1) = H_0(M) = z \tag{7.1.21}$$

(z 是整数，见式(7.1.7)，所有的 a_i 都是正整数，$a_i \in z$)。

定义 7.1.1 流形 M 的 k-维同调群 $H_k(M)$的秩(即同调群 $H_k(M)$的维数)称为流形 M 的 k 阶 Betti 数，记作

$$b_k = \dim(H_k(M)) \tag{7.1.22}$$

由于前面说过，在 f 同胚映射下：

$$f: H_k(M) \to H_k(N)$$

为同构映射(对所有的 $k \geqslant 0$)，所以 Betti 数是流形的拓扑不变量(即同胚映射下的不变量)。

定义 7.1.2 流形 M 上各阶 Betti 数的交替和称为流形 M 的 Euler 数 $\chi(M)$：

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k \tag{7.1.23}$$

例 1 四面形的 Euler 数为(参见图 7.1.2)：

$$\chi(M) = 2$$

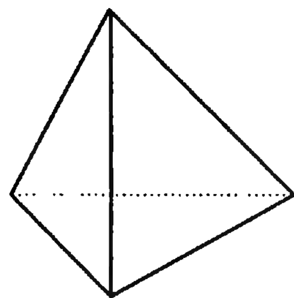


图 7.1.2

它有 4 个互相独立的顶点：

$$b_0 = \Delta = \dim(H_0(M))$$

6 个互相独立的边棱：

$$b_1 = 6 = \dim(H_1(M))$$

4 个互相独立的面：

$$b_2 = 4 = \dim(H_2(M))$$

所以 $\chi(M) = 4 - 6 + 4 = 2$

例 2 S^2 球面的 Euler 数为 $\chi(M) = 2$。

利用拓扑不变性，可以把一个四面形经过拓扑形变变成 S^2 球面，如图 7.1.3 所示。

在 S^2 球面上只有一个 0 维单形($abcd$ 点)和一个 2 维单形(球面)，没有 1 维单形，所以 $\chi(M) = 1 + 0 + 1 = 2$ 与四面形的 $\chi(M) = 2$

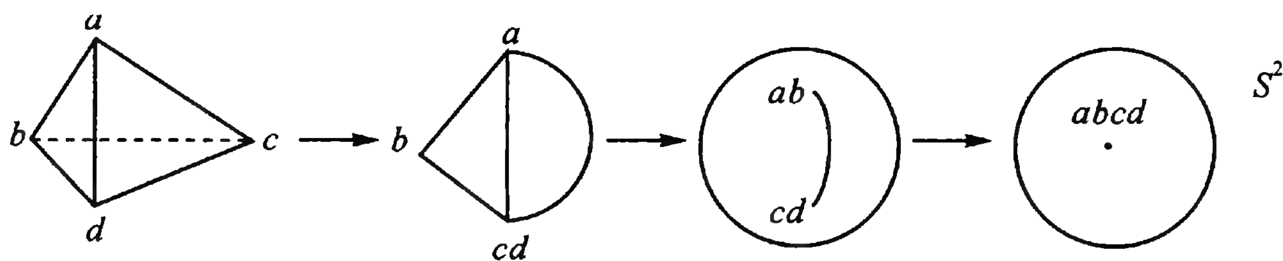


图 7.1.3

相同，任何拓扑同胚于球面的多面形都是 $\chi(M)=2$。

一般来说，可设有任意 n 维连通流形 M，当把它作三角剖分（任何多角形都可以作任意三角剖分）之后，可以定义 M 的欧拉数为各维单形 a_k 的交替和：

$$\chi(M)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \quad \left(=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k\right) \tag{7.1.24}$$

重要的是 $\chi(M)$ 为流形 M 的拓扑不变量((7.1.24)式的证明细节略去)。

以上讨论的链群都是以整数 z 为系数的线性相加的组合，所以有如下定义。

定义 7.1.3 流形 M 上以整数为系数的链群的线性组合所给出的同调群，称为**整同调群或连续整同调群** $H_k(M,Z)$，其中 Z 代表整数加群，因而是 Abel 群。k 代表流形 M 上的连续 k 单形，如式(7.1.6)，(7.1.7)。

当把 Z 群换成其他的 Abel 群 G，就又相仿地得到与 G 群对应的链群 $C_k(M,G)$、闭链群 $Z_k(M,G)$、边缘链群 $B_k(M,G)$ 和同调群 $H_k(M,G)$ 等。

定义 7.1.4 $H_k(M,Z_2)$——模 2 同调群

$H_k(M,R)$——实同调群

$H_k(M,Q)$——有理同调群

$$H_k(M,C)\text{——复同调群}$$

在所有同调群中,整同调群是最基本的,所含信息多于其他同调群。其他同调群 $H_k(M,G)$ 的性质均可由整同调群 $H_k(M,Z)$ 与 Abel群 G 的性质完全确定,这就是**普适系数定理**(细节略去)。

§7.2　同调群与连通性、定向性的关系

如果 M 是一个连通流形,则下式

$$H_0(M,G)=G \tag{7.2.1}$$

成立。理由和式(7.1.21)相仿,所不同的是式(7.1.21)的链群的系数是整数(属于 Z 群),此处链群的系数属于 G(G 是某一个 Abel 群)。

若 M 可分解为 l 个连通分支,则显然有

$$H_0(M,G)=G\oplus\cdots\oplus G \tag{7.2.2}$$

右方是 l 个 G 群的直和。

定理 7.2.1　如果 n 维流形 M 是一个紧致连通定向流形,则

$$H_n(M,G)=G \tag{7.2.3}$$

证明　n 维流形 M 的最高阶边缘链只能是($n-1$)维的 $B_{n-1}(M,G)$,所以 $B_n(M,G)=0$。于是,在 $H_k(M,G)$,$Z_k(M,G)$,$B_k(M,G)$都是 Abel 群的情况下,式(7.1.18)给出

$$H_n(M,G)=Z_n(M,G)-B_n(M,G)=Z_n(M,G)$$

由于 n 维流形 M 既是一个定向区域,又是一个紧致连通的 n 维闭链(包裹一个 $n+1$ 维空腔),所以 $Z_n(M,G)$只能有唯一的一个生成元,即这个 n 维紧致连通定向的流形 M 自身,相应的同调群 $H_n(M,G)$ 则是 G 的群元乘上这个唯一的生成元,所以得到式(7.2.3)。

例　1 维。　直线——延展到无穷远，非紧致

S^1 ◯ 紧致，定向，包裹一个 2 维空腔

2 维。　平面 ▱ 延展到无穷远，非紧致

S^2 紧致，定向，包裹一个 3 维空腔

定理 7.2.2　在非紧致 n 维连通流形 M 上，应该有

$$H_n(M,G)=0 \tag{7.2.4}$$

证明　因为非紧致 n 维连通流形 M 上不存在 n 维闭链，所以不存在 $H_n(M,G)$，式(7.2.4)成立（参看上面的非紧致流形的两个最简单的例子）。

若 M 是一个不定向的流形，则可以设法把它划分成为单形，从而得到一个定向的区域 Σ。原先的不定向流形上必定有一个与不定向性质密切相关的$(n-1)$维子流形。剖开这个$(n-1)$维子流形之前，M 是不定向的；剖开这个$(n-1)$维子流形之后，就出现两个$(n-1)$维边缘链，它们都是剖分后出现的定向区域 Σ 的边缘。显然这两个$(n-1)$维边缘链都等于原来剖分之前的那一个$(n-1)$子流形，所以剖分后的定向区域 Σ 上的$(n-1)$维边缘链必定两倍于剖分之前的 M 上的$(n-1)$维子流形。

仍以 Möbius 带作为例子，剖分如图 7.2.1 所示。

图中左方是 Möbius 带。从它的剖分可以看到，如果把 q' 与 q 黏合，并剪开连接 p,q 两点的 b 线段，再把一侧的边缘链 a 与另一侧的边缘链 a 对径黏合，则右方的 Σ 区域就又恢复成为左方的 Möbius带。

图中的符号∟标明定向。右方的 Σ 区域明显是定向的，左方的 Möbius 带则是非定向的，因为黏合之后，同一个小区域中同时出现

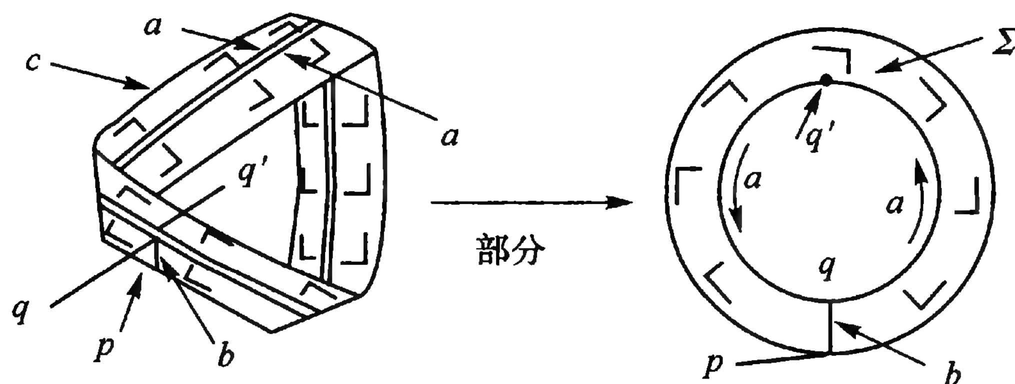


图 7.2.1

了┌和└两种不同的定向(也即出现了不定向)。

从图中还看到,Möbius 带的 a 棱是一个 1 维的子流形,是由 Σ 上两个连接的 1 维边缘链 a 和 a 黏合而成的。所以,定向区域 Σ 上一定有一个一维边缘链,它两倍于剖分之前的 Möbius 带上的 1 维子流形——a 棱。

根据图 7.2.1,q 与 q' 黏合,a 与 a 对径黏合,则可看到 Möbius 带的子流形包括:两个顶点(剖开后有 q,q' 和 p 三个顶点,黏合 q,q' 后,只有两个点)、三条棱线(剖开后有 a,a,b,c 四条棱线,黏合 a,a 后,只有三条棱线)、一个面 Σ。所以根据(7.1.24)式,Möbius 带的 Euler 数应是

$$\chi(M)=2-3+1=0$$

在这里,我们对同伦性质和同调性质的基本内容作一个小结:

(1)同伦群反映的是 k 维球面 S^k 向流形 M 作连续映射的拓扑障碍。$\Pi_k(M)$就是对应于 S^k 的同伦群,若同伦群 $\Pi_k(M)\neq 0$,就表明 M 中存在 $k+1$ 维的洞。这个洞是一个拓扑障碍,因为它使得同伦群 $\Pi_k(M)$中的 k 维环路不能收缩成为一个点。

(2)同调群反映的是 n 维流形 M 上有多少个独立的拓扑非平庸的 k 维子流形($k<n$),$H_k(M)$称为流形 M 的 k 阶同调群。

§7.3　通过对偶同态引入上同调群

设 A 为 n 维 Abel 群。在这个群里，存在一组基

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

A 中的每一个群元 a 都是 X 中各个基的如下整系数线性叠加：

$$a=\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \quad z_i\in Z, Z\text{ 是整数加法群} \tag{7.3.1}$$

再设 Hom(A,Z)是从 A 群到整数加法群 Z 的各种同态映射的集合（又称为“同态群”），于是可以从这个集合中任意挑选一种同态映射 $f(f\in \text{Hom}(A,Z))$，并要求 Hom(A,Z)和 f 的作用有如下特点：

$$\text{Hom}(A,Z): A\rightarrow Z \tag*{(7.3.2)$_1$}$$

$$f: a\rightarrow \langle f,a\rangle\in Z \tag*{(7.3.2)$_2$}$$

要实现(7.3.2)式，只须取一组与 X 对偶的基：

$$f=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$$

满足

$$\langle \xi_j,x_i\rangle=\delta_{ij} \tag{7.3.3}$$

就可得

$$\langle \xi_j,a\rangle=\langle \xi_j,\sum_{i=1}^{n} z_i x_i\rangle=z_j\in Z \tag{7.3.4}$$

也可以写成：

$$\langle f,a\rangle\rightarrow\left\{\begin{matrix}\langle \xi_1,a\rangle=z_1\\ \langle \xi_2,a\rangle=z_2\\ \vdots\\ \langle \xi_n,a\rangle=z_n\end{matrix}\right\}\in Z \tag*{(7.3.4)$_1$}$$

可以看到，$\langle\xi_j$ 和 $x_i\rangle$具有 Dirac 记号 bra 和 ket 的特点。

如果有两个 Abel 群 A 和 B，就可以利用上述的 bra 和 ket 记号

和下面的图 7.3.1 求解对偶同态。

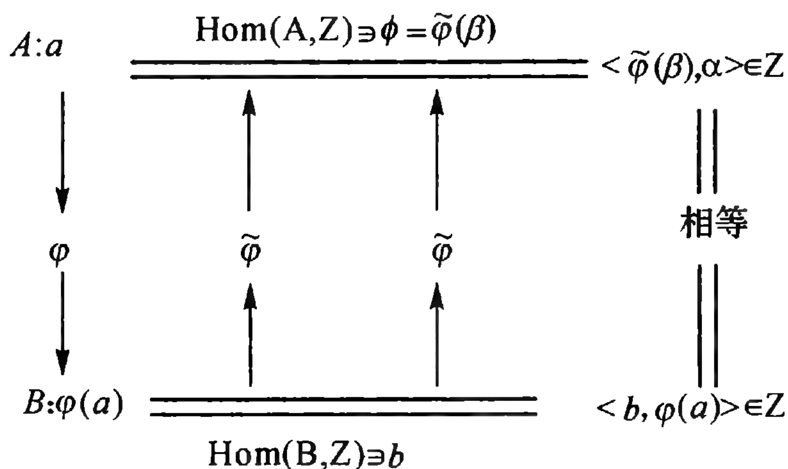


图 7.3.1

说明：

(1)同态对应 φ 和同态对应 $\tilde{\varphi}$ 的作用箭头是相反的，φ 对 a 的作用箭头方向是 $A\to B$ 的方向。

(2)在同态映射的集合 $\mathrm{Hom}(B,Z)$ 中选取了 b，$\tilde{\varphi}$ 对 b 的作用箭头方向是 $B\to A$ 的方向。

(3)在同态映射的集合 $\mathrm{Hom}(A,Z)$ 中选取了

$$f=\tilde{\varphi}(b)=\tilde{\varphi}_{ij}b_j=b_j\varphi_{ji} \tag{7.3.5}$$

(4)于是有：

$$\langle\tilde{\varphi}(b),a\rangle=b_j\varphi_{ji}a_i$$

$$\langle b,\varphi(a)\rangle=b_i\varphi_{ij}a_j$$

所以 $$\langle\tilde{\varphi}(b),a\rangle=\langle b,\varphi(a)\rangle\in Z \tag{7.3.6}$$

式(7.3.6)是对偶同态的一个重要性质。

仿照图 7.3.1，由 k-链群 $C_k(M)$（Abel 群）到整数加群 Z 的同态映射的集合 $\mathrm{Hom}(C_k(M),Z)$ 出发，可以定义 $C_k(M)$ 的对偶链群 $C^k(M)$。$C^k(M)$ 属于上链群系列，$C_k(M)$ 属于下链群系列。仿照图 7.3.1说明如下。

已知下链群有如下边缘同态关系：

$$\partial:C_k(M)\to C_{k-1}(M) \tag*{(7.3.7)$_1$}$$

$A=C_k(M):C_k(a)$ ══ $\mathrm{Hom}(A,Z)\ni\tilde{\partial}C^{k-1}(b)$ ══ $<\tilde{\partial}C^{k-1}(b),\ C_k(a)>$

$\downarrow\partial$　　$\uparrow\tilde{\partial}$　　$\uparrow\tilde{\partial}$　　‖ 相等 ‖

$B=C_{k-1}(M):\partial C_k(a)$ ══ $\mathrm{Hom}(B,Z)\ni C^{k-1}(b)$ ══ $<C^{k-1}(b),\partial C_k(a)>$

图 7.3.2

说明：

(1)自图 7.3.2 得到**上边缘同态关系**(与式(7.3.7)$_1$ 对照)：

$$\tilde{\partial}:C^{k-1}(M)\rightarrow C^k(M) \qquad (7.3.7)_2$$

这是上链群间的对偶同态关系，与(7.3.7)$_1$ 式相似。

(2)$\langle c^{k-1}(b),\partial c_k(a)\rangle=c^{k-1}(b)\partial_{ba}c_k(a)$

$$\langle\tilde{\partial}c^{k-1}(b),c_k(a)\rangle=\tilde{\partial}_{ab}c^{k-1}(b)c_k(a)=c^{k-1}(b)\partial_{ba}c_k(a)$$

所以　$$\langle c^{k-1}(b),\partial c_k(a)\rangle=\langle\tilde{\partial}c^{k-1}(b),c_k(a)\rangle \qquad (7.3.8)$$

(3)由 § 7.1 节，有

$$\partial\cdot\partial=0\rightarrow\partial_{k-1}\cdot\partial_k=0 \qquad (7.3.9)$$

$\partial_{k-1}\cdot\partial_k$ 的对偶算子是

$$\widetilde{(\partial_{k-1}\partial_k)}=\tilde{\partial}_k\cdot\tilde{\partial}_{k-1}$$

所以　$$\tilde{\partial}_k\cdot\tilde{\partial}_{k-1}=\widetilde{(\partial_{k-1}\partial_k)}=0\rightarrow\tilde{\partial}\tilde{\partial}=0 \qquad (7.3.10)$$

(4)由前述可以定义上链群 $C^k(M)$ 的子群(参考(7.1.13)式)如下。

上闭链群：$Z^k(M)$是 $\mathrm{Ker}\tilde{\partial}$，

$$Z^k(M)=\{c^k;\tilde{\partial}c^k=0\} \qquad (7.3.11)$$

上边缘群：$B^k(M)$是 $\text{Imag}\tilde{\partial}_{k-1}$，

$$B^k(M)=\{b^k=\tilde{\partial}c^{k-1}\} \tag{7.3.12}$$

从而又可以定义上同调群为(与(7.1.18)式对照)：

$$H^k(M)=Z^k(M)/B^k(M) \tag{7.3.13}$$

$H^k(M)$是 k-上闭链的等价类(mod 上边缘)的集合，并构成Abel群。

从图 7.3.2 还看到，上同调群与下同调群是同构的，所以存在如下定理：

$$b^k=\dim H^k(M)=b_k=\dim H_k(M) \tag{7.3.14}$$

其中 $b^k=\dim H^k(M)$是上 Betti 数，$b_k=\dim H_k(M)$是下 Betti 数。

§7.4　de Rham 上同调论

根据第 1 章(1.5.14)式写出 Stokes 定理：

$$\int_c \mathrm{d}w_{n-1}=\int_{\partial c} w_{n-1}$$

把它与(7.3.8)，(7.3.6)式作对比，就可看到(1.5.14)式也是一种类似于(7.3.8)，(7.3.6)式的标积

$$\langle c,\mathrm{d}w_{n-1}\rangle=\langle\partial c,w_{n-1}\rangle \tag{7.4.1}$$

若利用 Stokes 定理，把 c 换成∂c，则(7.4.1)式给出下式

$$\langle\partial c,\mathrm{d}w_{n-1}\rangle=\langle\partial\partial c,w_{n-1}\rangle=0 \tag{7.4.2}$$

这里利用了边缘链的边缘必为 0，即$\partial\partial=0$(见§7.1)。

再把 w 换成 $\mathrm{d}w$，则(7.4.1)式又给出

$$\langle c,\mathrm{dd}w_{n-1}\rangle=\langle\partial c,\mathrm{d}w_{n-1}\rangle=0 \tag{7.4.3}$$

这里又利用了 $\mathrm{dd}w=0$(见(1.4.17)式)。

于是把(7.4.2)式和(7.4.3)式合起来，就得

$$0=\langle\partial^2 c,w_{n-1}\rangle=\langle\partial c,\mathrm{d}w_{n-1}\rangle=\langle c,\mathrm{d}^2 w_{n-1}\rangle \tag{7.4.4}$$

$c, \partial c, \partial^2 c$ 是积分区域；$w_{n-1}, \mathrm{d}w_{n-1}, \mathrm{d}^2 w_{n-1}$ 是微分形式。与§7.3 的同态对应关系$(7.3.7)_1$，$(7.3.7)_2$ 式比较，就可从(7.4.2)，(7.4.3)，(7.4.4)式得到如下系列：

$$\partial: c_{k+1} \xrightarrow{\partial} c_k \xrightarrow{\partial} c_{k-1} \tag{7.4.5$_1$}$$

此处箭头方向指向 k 减少的方向，所以 c_{k+1}, c_k, c_{k-1} 属于下链群系列。式$(7.4.5)_1$ 具有下同调性质。

自式(7.4.2)，(7.4.3)，(7.4.4)式还得到如下系列：

$$\mathrm{d}: w_{p+1} \xleftarrow{d} w_p \xleftarrow{d} w_{p-1} \tag{7.4.5$_2$}$$

箭头指向 p 增加的方向，所以 w_{p+1}, w_p, w_{p-1} 属于上链群系列。式$(7.4.5)_2$具有上同调性质。

由 Stokes 定理得出的上链群系列是 de Rham 最早发现并研究的，所以有关这个上链群系列的上同调理论被称为 de Rham 上同调论。

仿照(7.3.11)，(7.3.12)，(7.3.13)式，并参看(7.1.13)，(7.1.14)，(7.1.18)式，可以依次给出下列定义。

定义 7.4.1　$Z^p_{\mathrm{dR}} = \{w_p, \mathrm{d}w_p = 0\}$，即 Ker d_p，称**闭形式。**

定义 7.4.2　$B^p_{\mathrm{dR}} = \{w_p, w_p = \mathrm{d}\alpha_{p-1}\}$，即 Imag$\mathrm{d}_{p-1}$，称**恰当形式。**

由于

$$\int_{c_p} w_p + \mathrm{d}\alpha_{p-1} = \int_{c_p} w_p + \int_{\partial c_p} \alpha_{p-1} = \int_{c_p} w_p$$

(因为 $c_p \in Z_p \rightarrow \partial\, c_p = 0$)

$$\int_{c_p + \partial \alpha_{p+1}} w_p = \int_{c_p} w_p + \int_{\alpha_{p+1}} \mathrm{d}w_p = \int_{c_p} w_p$$

(因为 $w_p \in Z^p_{\mathrm{dR}} \rightarrow \mathrm{d}w_p = 0$)

所以$\langle c_p, w_p\rangle = \int_{c_p} w_p$ 只取决于 c_p 的等价类和 w_p 的等价类，并不依赖于在 $c_p\in Z_p$ 的等价类中选取 c_p，或选取 $c'_p = c_p + \partial a_{p+1}$；也不依赖于在 $w_p \in Z^p_{dR}$的等价类中选取 w_p，或选取 $w'_p = w_p + d\alpha_{p-1}$。

对于 c_p，它的等价类的群就是同调群(见(7.1.18)：

$$H_p(M,R) = Z_p(M,R)/B_p(M,R)$$
$$= \mathrm{Ker}\partial_p/\mathrm{Imag}\partial_{p+1} \quad (7.4.6)$$

这里我们把 $H_p(M,G)$取为 $H_p(M,R)$。$G=R$ 是实数的集合。

对于 w_p，它的等价类的群是

$$H^p_{dR}(M,R) = Z^p_{dR}(H,R)/B^p_{dR}(M,R)$$
$$= \mathrm{Ker}\ d_p/\mathrm{Imag}d_{p-1} \quad (7.4.7)$$

$H^p_{dR}(M,R)$就是 de Rham 上同调群。

为了方便，可根据定义 7.4.1 和定义 7.4.2，把(7.4.7)式的右方看作是集合 $Z^p_{dR} = \{w_p, dw_p = 0\}$ 中减去集合 $B^p_{dR} = \{w_p, w_p = d\alpha_{p-1}\}$(Abel 群的“除以”就是“减去”)。

要说明(7.4.7)式是上同调群，还必须给出它的一组基$\{w_i\}$(闭形式，$i=1,2,\cdots,\dim H^p_{dR}(M,R)$)与下同调群(即 $H_p(M,R)$)的一组基$\{C_i\}$(C_i 都是闭链，$i=1,2,\cdots,\dim H_p(M,R)$)之间存在的对偶关系。为此，de Rham 证明了以下两个定理(证明的前提是 M 为一个紧致无边的流形，证明略去)。

定理 7.4.1 给定一组 γ_i，$i=1,2,3,\cdots,\dim H_p$，则一定存在一个闭的 p-形式 w，它满足

$$\gamma_i = \Pi(c_i, w) = \int_{c_i} w \qquad (i=1,3,\cdots,\dim H_p) \quad (7.4.8)$$

定理 7.4.2 如果有一个 p-形式 α_p，所有的 $\Pi(c_i,\alpha_p)$都等于零，即

$$0=\Pi(c_i,\alpha_p)=\int_{c_i}\alpha_p \qquad (i=1,2,3,\cdots,\dim H_p) \qquad (7.4.9)$$

则 α_p 必定是恰当形式：$\alpha_p=\mathrm{d}\beta_{p-1}$。

利用定理 7.4.1，设流形 M 的下同调群的维数为 $\dim H_p=r$，则在这个流形 M 中必定存在 r 个互相独立的闭链（M 的子流形）：c_1，c_2，…，c_r，并且可以分别在每一个闭链 c_i 上各定义一个闭的 p-形式 w_i（$\mathrm{d}w_i=0$），得（i 不求和）：

$$\Pi_{ii}=\Pi(c_i,w_i)=\int_{c_i}w_i\neq 0$$

$$\Pi_{ij}=\Pi(c_i,w_j)=\int_{c_i}w_j=0 \quad (\text{因 } w_j \text{ 并非定义在 } c_i \text{ 上})$$

相应地把 w_i 归一化，就得

$$\Pi_{ij}=\Pi(c_i,w_j)=\langle c_i,w_j\rangle=\delta_{ij} \qquad (7.4.10)$$

利用定理 7.4.1 和 7.4.2 还看到，在 $c_p\in Z_p$ 的等价类中，选取 c_p 或 $c'_p=c_p+\partial\alpha_{p+1}$ 对 $\langle c_i,w_j\rangle$ 没有影响；在 $w_p\in Z^p_{\mathrm{dR}}$ 的等价类中，选取 w_p 或 $w'_p=w_p+\mathrm{d}\alpha_{p-1}$ 对 $\langle c_i,w_j\rangle$ 也没有影响。

由此得知，根据 de Rham 的定理 7.4.1 和定理 7.4.2 找到的一组等价类 w_i（$i=1,2,3,\cdots,r$）具有(7.4.10)式的性质。这表明这一组 w_i（$i=1,2,3,\cdots,r$）与 $H_p(M,R)$ 的一组基（即 c_i 的等价类）是相互对偶的，所以可以把 w_i（$i=1,2,\cdots,r$）的等价类看作是线性基，并由此得到 $H^p_{\mathrm{dR}}(M,R)$ 群。它是对偶于同调群 $H_p(M,R)$ 的一种上同调群，与上一节所说的简单上同调群是等价的：

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M,R)\cong H^p(M,R) \qquad (7.4.11)$$

这里的 R 是指可任意取 w'_j 为 w_j 的线性组合，系数是属于 R 的任意实数：

$$\Pi(c_i,w'_j)=\int_{c_i}w'_j\in R$$

然后可对 w_j' 作线性变换，变成满足(7.4.10)式的归一化的 w_i。

值得注意的是，依赖于微分结构的空间 $H_{dR}^k(M,R)$ 实际上是拓扑不变的，所以，$H_{dR}^k(M,R)$ 沟通了流形的拓扑性质和流形的微分结构。

de Rham **上同调环** 考察以下特点：

(1) 如果 $dw_i=0, dw_j=0$，则

$$d(w_i\wedge w_j)=dw_i\wedge w_j+(-1)^p w_i\wedge dw_j=0$$

$$(w_i \text{ 是 } p\text{-形式})$$

所以有

$$\text{闭形式}\wedge\text{闭形式}=\text{闭形式} \tag{7.4.12}$$

(2) 如果 $dw_i=0, w_j=d\alpha_{j-1}$，则

$$w_i\wedge w_j=w_i\wedge d\alpha_{j-1}=(-1)^p d(w_i\wedge\alpha_{j-1})$$

$$(w_i \text{ 是 } p\text{-形式})$$

所以有

$$\text{闭形式}\wedge\text{恰当形式}=\text{恰当形式} \tag{7.4.13}$$

利用以上两个特点，可通过外积 $\wedge$ 来定义 de Rham 上同调群的上积：

$$H_{dR}^p(M,R)\otimes H_{dR}^q(M,R)=H_{dR}^{p+q}(M,R) \tag{7.4.14}$$

因为 $H_{dR}^{p+q}(M,R)$ 中的同调等价类正好是 $H_{dR}^p(M,R)$ 与 $H_{dR}^q(M,R)$ 的同调等价类的乘积(外积)。

若 M 的维数是 n，则利用(7.4.14)式可给出 $H_{dR}^0(M,R)$，$H_{dR}^1(M,R), H_{dR}^2(M,R), \cdots, H_{dR}^n(M,R)$ 的集合。这个集合又可写成：

$$\oplus H_{dR}^p(M,R) \quad (p=0,1,2,\cdots,n) \tag{7.4.15}$$

它具有下列的环的性质：

①这个集合内部有加法，也有乘法。

②加法情况下，这个群是 Abel 群。

③乘法情况下，满足结合律 $(ab)c=a(bc)$ 和分配律 $a(b+c)=ab$

$+ac,(a+b)c=ac+bc$。

式(7.4.15)的集合$\oplus H^p_{dR}(M,R)(p=0,1,\cdots,n)$称为 de Rham 上同调环。一般的上同调也有上同调环,与 de Rham 上同调环同构(细节略去)。

(3)如果 $M=M_1\times M_2$ 是乘积流形,可类似于(7.4.14)式,定义

$$H^k(M,R)=\bigoplus_{i+j=k}H^i(M,R)\otimes H^j(M,R) \qquad (7.4.16)$$

称为 Künneth 公式。

§7.5 调和形式 $\mathrm{Harm}^k(M,R)$

当流形上存在度规张量场时,可引入 Hodge * 运算,并定义椭圆微分算子 Δ(见第 4 章$(4.1.26)_3$ 式)。Δ 算子的核 φ_p($\Delta\varphi_p=0$)称为调和 p-形式。调和 p-形式的集合组成实数域上的线性空间 $\mathrm{Harm}^p(M,R)$。

定理 7.5.1 设流形 M 为紧致无边界定向流形,则 $\mathrm{Harm}^p(M,R)$ 与 $H^p(M,R)$同构。

证明 紧致无边界定向流形 M 上的任意一个 p-形式可唯一地分解成为(见(3.4.21)式):

$$w_p=\mathrm{d}\alpha_{p-1}+\delta\beta_{p+1}+r_p \qquad (r_p\text{ 是调和形式})$$

若 $w_p\in Z_p(M)$,即 $\mathrm{d}w_p=0$,则因 $\mathrm{dd}\alpha_{p-1}=0$,$\mathrm{d}r_p=0$(见§3.4 节调和形式 r_p 特点),必有

$$\mathrm{d}\delta\beta_{p+1}=0$$

于是,利用$(4.1.26)_1$ 式,得

$$(\beta_{r+1},\mathrm{d}\delta\beta_{p+1})=(\delta\beta_{p+1},\delta\beta_{p+1})=0\Rightarrow\delta\beta_{p+1}=0$$

所以 $\quad w_p=\mathrm{d}\alpha_{p-1}+r_p$

$\mathrm{d}\alpha$ 是恰当形式，所以每一个上同调类 $\{w_p\}$ 只对应于一个 r_p，从而 $H_{\mathrm{dR}}^p(M,R)$（上同调类 $\{w_p\}$ 的集合构成的线性空间）与 $\mathrm{Harm}^p(M,R)$（调和 p-形式的集合构成的实数域上的线性空间）是同构的。

推论 1 在紧致无边的流形上，$\mathrm{Harm}^p(M,R)$ 是有限维的，所以 $H_{\mathrm{dR}}^p(M,R)$ 也是有限维的。

推论 2 由于 Hodge $*$ 与 Δ 对易，若 r 是调和形式，则 $*r$ 也是调和形式（因为 $*\Delta r=0=\Delta * r$）。于是 $\mathrm{Harm}^p(M,R)$ 与 $*\,\mathrm{Harm}^p(M)=\mathrm{Harm}^{n-p}(M,R)$ 同构，从而 $H_{\mathrm{dR}}^p(M,R)$ 与 $H_{\mathrm{dR}}^{n-p}(M,R)$ 同构：

$$b^p=b^{n-p} \tag{7.5.1}$$

这个关系称为 Poincaré 对偶。

推论 3 有 Poincaré 对偶性质的 M 流形必须是定向的（证明略）。

推论 4 有 Poincaré 对偶性质的 M 流形必须是紧致无边的（证明略）。

第 8 章　纤维丛及其拓扑结构

§8.1　什么是纤维丛

1. 丛

丛(Bundle)包含三个内容：一个是底空间 B，一个是全空间 E，还有一个是丛的投影映射 Π。所以可以用(E,B,Π)来代表一个丛。E,B,Π 之间有如下的关系：

$$\Pi:E\to B \tag{8.1.1}$$

最简单的丛是乘积丛$(B_1\times B_2,B_1,\Pi)$，其中 $E=B_1\times B_2$ 是全空间，B_1 是底空间，投影映射 Π 的作用则是

$$\Pi:B_1\times B_2\to B_1 \tag{8.1.2}$$

更具体一些，如果 x_1 是 B_1 中的坐标，x_2 是 B_2 中的坐标，则(x_1,x_2)

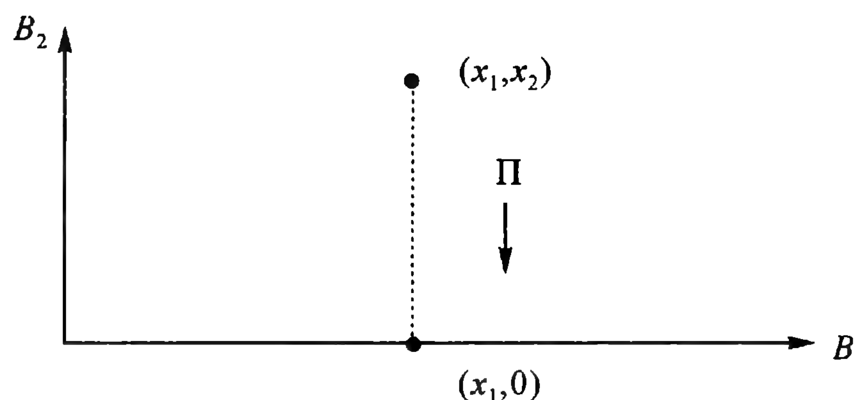


图 8.1.1

就是 $E=B_1\times B_2$ 中的坐标(见图 8.1.1)。于是(8.1.2)式的 Π 的作

用在此可写成：

$$\Pi:(x_1,x_2)\to x_1 \tag{8.1.2}_1$$

把一条小纸黏成圆柱面，就可以得到一个最简单的乘积丛$(S^1\times I,\Pi)$。其中S^1是一个圆，相当于底空间B_1；I对应于柱高，从属于B_2空间。见图8.1.2。

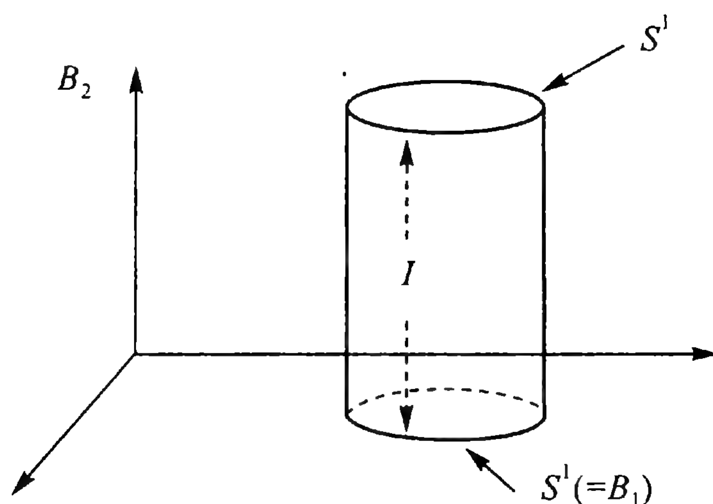


图8.1.2

但在更一般的情况，例如在Möbius带的情况，从整体上看，E就不再是两个空间的简单乘积了。然而在局部，仍可看作是两个局部空间的乘积$U\times I$。$U(\subset S^1)$是S^1的某一个小部分(即S^1的一个开覆盖)，但需要另外再有一个机制，造成Möbius带在某处发生扭曲。所以有时也把纤维丛称为"扭曲的空间的乘积"。

我们还要求拓扑空间$\Pi^{-1}(x)$(对于所有的$x\in B_1$)同胚于某一个空间F(其地位与上述乘积空间$B_1\times B_2$中的B_2的某一个子空间相当)，即

$$\Pi^{-1}(x)=F_x,\quad F_x\text{ 同胚于 }F \tag{8.1.3}$$

则F_x称为底流形B_1上的x处的纤维，F则称为标准纤维。

2. 纤维丛

纤维丛(Fiber Bundle)　如果一个丛(E,B,Π)的底空间B可以由一族开集$\{U_j;j\in J\leqslant N\}$来覆盖，而且各个$U_j$的纤维$\Pi^{-1}(x)=$

F_x 都与一个标准纤维 F 有同胚映射关系，那末，全空间 E 就可以看作是一族纤维 $\Pi^{-1}(x)$（对于所有的 $x\in B_1$）的集合。由此出发，又设 U_α,U_β 是底空间 B 中的两个相交的开覆盖，则可以在其中取 p 点，($p\in U_\alpha\cap U_\beta$)，并且利用 U_α,U_β 的两个同胚映射 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta$ 得到（P 代表 U_α 或 U_β 上的一点）：

$$\varphi_\alpha:\ \begin{array}{c}\Pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F\\ x_p\to(p,\xi(p))\end{array}\qquad \varphi_\beta:\ \begin{array}{c}\Pi^{-1}(U_\beta)\to U_\beta\times F\\ x_p\to(p,\xi'(p))\end{array}\tag{8.1.4}$$

这里，$\xi(p)=\xi_p^1,\cdots,\xi_p^k$ 是纤维空间 F（k 维）中的一个矢量；$\xi'(p)=\xi'^1_p,\cdots,\xi'^k_p$ 是纤维空间 F（k 维）中的另一个矢量，而且有变换关系：

$$\xi^\alpha(p)=a_{\alpha\beta}(p)\xi'^\beta(p)\tag{8.1.5}$$

其中 $a_{\alpha\beta}(p)$ 是一个 $k\times k$ 矩阵（$\alpha,\beta=1,2,\cdots,k$）。

集合 $\{a_{\alpha\beta}(p)\}$ 组成一个群 $G=\{a_{\alpha\beta}(p)\}$，这个群（G）称为**结构群**，它给出纤维丛的结构。例如给出 Möbius 带的扭曲结构。

此外还注意到，$a_{\alpha\beta}(p)$ 应该是 x_p 随 p 变动的连续函数。

综合起来可以这样说，纤维丛除 E,B,Π 三个内容外，还有一个内容就是结构群 G。因此，应该用 (E,B,Π,G) 来代表一个纤维丛，与 (E,B,Π) 所代表的丛对比，纤维丛多了一个结构群 G。

由于标准纤维也是纤维丛的不可缺少的内容，所以还有一种写法，用 (E,B,F,Π,G) 来代表以 F 为标准纤维的纤维丛。有时把 B 写成 M，因为它代表底流形。

以下利用切丛 $T(M)=\bigcup\limits_p T_p(M)$ 作为例子，对纤维丛的特点作一些更具体的说明。

设切丛的底流形为 M（M 是一个 m 维流形），M 上 p 点的纤维 F_p 就是 $T_p(M)$。$T_p(M)$ 是 m 维向量空间，它与标准纤维 $F=R^m$ 同构。

再在 M 中选基矢组 $\{e_a(p)\}$，则 $T_p(M)$ 中任意切向量 X_p 可写成

$$X_p=\xi^a(p)e_a(p),a=1,2,\cdots,m,\xi^a(p)\text{是实数}\tag{8.1.6}$$

另外，在切丛 $T(M)$ 中还定义了投射变换 Π。前已说过，Π 的作用就是

$$\Pi: \quad T(M) \to M$$

$$X_p \to p \tag{8.1.7}$$

由于切丛在局域范围内是底流形 U_α 与标准纤维 $F=R^m$ 的乘积，于是有同胚映射

$$\varphi_\alpha: \quad \Pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times R^m$$

$$X_p \to (p, \xi(p)) \quad (p\ \text{是}\ U_\alpha\ \text{上一点}) \tag{8.1.8}$$

若点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$，则还存在另一个同胚映射

$$\varphi_\beta: \quad \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times R^m$$

$$X_p \to (p, \xi'(p)) \quad (p\ \text{是}\ U_\beta\ \text{上一点}) \tag{8.1.8)$_1$}$$

$\xi(p)$ 与 $\xi'(p)$ 之间存在(8.1.5)式的变换关系。

可以在底流形 M 上的 p 点邻近选取局域坐标 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^m)$，则切空间的基矢 $e_a(p)(a=1,2,\cdots,m)$ 可以用自然标架写成

$$e_a(p) = e_a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{8.1.9}$$

我们对流形取坐标变换，p 点不变，切空间基矢 $e_a(p)$ 不变，所以不影响**纤维空间 F 中的向量 $\xi^a(p)$**（见(8.1.4)式），不影响转换函数 $a_{\alpha\beta}(p)$（见(8.1.5)式）和 $G=\{a_{\alpha\beta}(p)\}$。

3. 自洽条件

对于底流形 M 中的每一个点 x_ι，都可找到它的一个邻域 U_ι 和一个同构映射 Φ_ι。这个同构映射 Φ_ι 的作用就是把 $\overline{U}_i \otimes F$ 映射到纤维丛 E 的子集合 $\Pi^{-1}(U_\iota)$ 中去：

$$\Phi_\iota: (\overline{U}_i \otimes F) \to \Pi^{-1}(\overline{U}_\iota) \tag{8.1.10}$$

由于 $(x_\iota \otimes f) \in \overline{U}_i \otimes F(x_i \in \overline{U}_\iota, f \in F)$，所以利用式(8.1.10)就得

$$\Phi_\iota: \quad (x_\iota \otimes f) \to \Pi^{-1}(x_\iota) \tag{8.1.10)$_1$}$$

所以 $\quad \Pi(\Phi_i(x_i \otimes f)) \to \Pi\Pi^{-1}(x_i) = x_i \qquad (8.1.10)_2$

可见这是一个必须满足的自洽条件。

由同构映射 Φ_i 又可以定义两个相交的领域 U_i 和 U_j 中的转移矩阵 Φ_{ij}（由 U_j 转移到 U_i）：

$$\Phi_{ij}=\Phi_i\Phi_j^{-1} \quad 当\ x\in U_i\cap U_j \tag{8.1.11}$$

Φ_{ij} 对于每一个给定的点 $x(x\in U_i\cap U_j)$ 的作用就是把 x 点在 U_j 上的坐标转换成 x 在 U_i 上的坐标。因此有如下性质：

$$\Phi_{ii}=I \tag*{(8.1.12)$_1$}$$

$$\Phi_{ij}\Phi_{jk}=\Phi_{ik} \quad (当\ x\in U_i\cap U_j\cap U_k) \tag*{(8.1.12)$_2$}$$

显然 $(8.1.12)_1$ 和 $(8.1.12)_2$ 式是所有的邻域 $U_i,U_j,U_k,\cdots$ 可以黏合成为整个纤维丛的充分必要条件。纤维丛的性质完全决定于转换矩阵的性质。

§8.2　纤维丛与截面

前一节已经说明，切丛 $T(M)=\bigcup_p T_p(M)$ 是一种纤维丛。若在（流形 M 上的）每一个 p 点的切丛纤维 $T_p(M)$ 中按照给定的（与 p 有关的）某种规则，选取一个切向量，则在整个 M 上就得到一个切向量场。由此就可把 M 上的切向量场看作是 M 上的切丛的截面，并且引出“截面”的定义如下：

定义 8.2.1　设 p 是底流形 M 上的一个点，$\Pi^{-1}(p)$ 是 M 上属于 p 点的纤维（纤维的维数一般取作 k，但切丛 $T(M)$ 的纤维的维数必须是 m，m 是底流形 M 的维数），在每一个 p 点的纤维 $\Pi^{-1}(p)$ 上选定一个 S_p，则底流形 M 上所有的各个点 p 的 S_p 集合就形成纤维丛的一个截面 $S(p)$。

（这里必须说明一点：纤维如果是矢量的集合，则 S_p 就是其中的

一个矢量;如果是张量的集合,则 S_p 就是其中的一个张量……)

定义 8.2.2 若纤维丛是切丛,则截面 $S(p)$ 就是一个切向量场,它的维数是 m,与底流形 M 的维数相同。

定义 8.2.3 若纤维丛是一个 k 维向量丛,则截面 $S(p)$ 就是底流形 M 上的一个 k 维向量场。

向量丛的基础向量 $e=\{e_i(x)\}(i=1,2,\cdots,k)$ 称为向量丛的标架场。其他 k 维向量场都是标架场 $\{e_i(x)\}(i=1,2,\cdots,k)$ 的线性组合。线性组合的系数是底流形 M 上的函数。所以标架场可作线性变换,得到另外的标架场:

$$e'_j(x)=e_i(x)c^i_j(x),\quad \det c^i_j\neq 0 \tag{8.2.1}$$

定义 8.2.4 流形 M 上的向量丛 E 的全体标架的集合 $L(E)$ 称为向量丛 E 的**标架丛**$L(E)$:

$$L(E)=\{(x,e'),e'(x)\text{代表 } x \text{ 处的所有各种可能的标架}\} \tag{8.2.2}$$

可以令 $e_i(x)$ 为覆盖底流形 M 的开集 U_α 的光滑矢值函数,而全体可能的标架可用 $e'=ec$ 来表示。式(8.2.1)中的 $\{c^i_j(x)\}$ 又可看作是这个开集 U_α 上的光滑矩阵函数。

当已选定标架场 $\{e_i(x),i=1,\cdots,k\}$,则利用每一个不同的矩阵函数 $C(x)=c^i_j(x)$ 可得到一个新的标架场。所有的 $k\times k$ 阶非奇异矩阵函数 $(c^i_j(x))$ 的集合与全体标架丛的集合一一对应,所以矩阵函数 $(c^i_j(x))$ 的集合等价于标架丛 $L(E)$。

由于底流形 M 的维数是 m,$k\times k$ 阶非奇异矩阵函数 $(c^i_j(x))$ 的维数是 $k\times k=k^2$,所以标架丛 $L(E)$ 的总的自由度(也就是 $L(E)$ 标

架丛作为一个流形的维数)是

$$m+k^2 \tag{8.2.3}$$

m 代表底流形 M 上的开集 U_i 的自由度，k^2 代表 k 维标架场的变换矩阵的自由度。$L(E)$局域同胚于 $U_i\times GL(k,R)$，$GL(k,R)$是"k 阶一般实线性群"。由此看到，标架丛 $L(E)$的纤维的变换带有 $GL(k,R)$群的特征，所以标架丛 $L(E)$的纤维是一个群流形。纤维是群流形的丛，称为主丛(见下一节定义 8.3.2)，按照这个定义，**标架丛 $L(E)$ 就是一种主丛，称为向量丛 E 的伴主丛**。

§8.3　几种有代表性的纤维丛

1. 一般向量丛 $E(M,F,\Pi,G)$

一般向量丛 E 由底流形 M 和纤维空间 F 组成。M 是一个 m 维流形，F 是线性向量空间，它的维数是 k。因为不是切丛，而是一般向量丛，所以 k 一般不等于 m。

在向量丛 E 与底流形 M 之间的投影算符仍写成

$$\Pi: E\rightarrow M \tag{8.3.1}$$

这个投影算符 Π 是连续满映射。于是看到，一般向量丛 E 的基本内容就是 M,F,Π,G。我们可把这个 E 及其内容记为 $E(M,F,\Pi,G)$，并用图 8.3.1 表达一般向量丛 E 的内部关系：

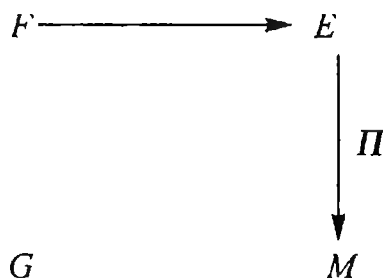


图 8.3.1

图 8.3.1 中 $G=\{g_{\alpha\beta}(x)\}$代表底流形上每一个固定点 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 处的向量空间 F 的转移矩阵之集合。G 就是结构群。

以下给出几个有用的定义.

定义 8.3.1 群 G 的自作用有两种

$$\left.\begin{aligned}&(\text{i})L_g:G\to G\quad L_g(h)=gh\quad \text{称左(平移)作用}\\&(\text{ii})R_g:G\to G\quad R_g(h)=hg\quad \text{称右(平移)作用}\end{aligned}\right\}(g,h\in G)$$

定义 8.3.2 如果有一个纤维丛 P,其标准纤维 F 与结构群 G 的群空间是等同的,而且 G 左平移作用于 F,则这个纤维称为实丛(标架丛就是其中的一个例子,G 左平移作用于标架丛的纤维)。

定义 8.3.3 变换群 G 作用于某个空间 S,取 $g\in G,x\in S$。若是除 $g=e$ 外,$gx\neq x$,则称 G **自由地作用于** S。

2. 主丛 $P(MG\Pi)$

主丛 P 的纤维是一个李群的群流形 G,主丛 P 的转移函数(即结构群)也归属于 G 群,它左平移作用在纤维 G 上。

由于丛的整体结构要求底流形 M 的每一个交叠区(即 $U_\alpha\cap U_\beta$)上的纤维光滑地黏结,所以我们要找出交叠区的 x 点($\in U_\alpha\cap U_\beta$)上 $\Pi^{-1}(U_\alpha)$与 $\Pi^{-1}(U_\beta)$的关系。为此,可以利用图 8.3.2 和图 8.3.3。

图 8.3.2 显示了U_α 上 x 点的纤维$\Pi^{-1}(x)=G_x$,以及$\Pi^{-1}(x)$上的 u 点与标准纤维 G 上的 $\varphi_{\alpha,x}(u)$点的同胚映射关系($\varphi_{\alpha,x}(u)$是与 U_α 有关的)。

由于主丛局域平庸,所以对于局域开集 U_α 有如下同胚映射 φ_α:

$$\varphi_\alpha:\qquad \Pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$$

同胚映射

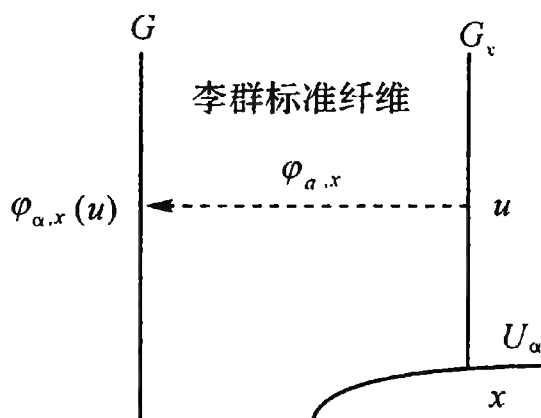


图 8.3.2

$$u \to (x, \varphi_{\alpha,x}(u)) \tag{8.3.2}$$

$$(u \in \Pi^{-1}(U_\alpha), \quad x \in U_\alpha, \quad \varphi_{\alpha,x}(u) \in G)$$

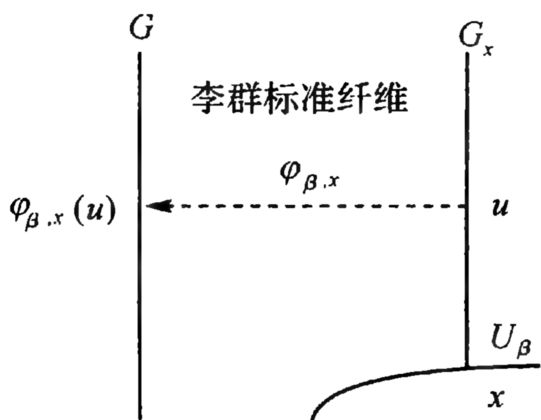


图 8.3.3

图 8.3.3 显示了 U_β 上 x 点的纤维 $\Pi^{-1}(x)=G_x$，以及 $\Pi^{-1}(x)$ 上的 u 点与标准纤维 G 上的 $\varphi_{\beta,x}(u)$ 点的同胚映射关系。($\varphi_{\beta,x}(u)$ 是与 U_β 有关的)

若 $x\in U_\alpha \cap U_\beta$，则又有同胚映射

$$\varphi_\beta : \Pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times G$$

同胚映射

$$u \to (x, \varphi_{\beta,x}(u)) \tag{8.3.3}$$

$$(u \in \Pi^{-1}(U_\beta), \quad x \in U_\beta, \quad \varphi_{\beta,x}(u) \in G)$$

为了在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 交叠区上的 x 点及其邻近光滑地黏结 $\varphi_{\alpha,x}(u)$ 和 $\varphi_{\beta,x}(u)$，就需要确定 x 处 $\Pi^{-1}(U_\alpha)$ 与 $\Pi^{-1}(U_\beta)$ 之间的联系。为此，我们利用 $\varphi_{\alpha,x}(u)$ 和 $\varphi_{\beta,x}(u)$ 定义 $\lambda_{\alpha\beta}(x)$ 如下：

定义

$$g_\alpha=\varphi_{\alpha,x}(u),g_\beta=\varphi_{\beta,x}(u) \tag{8.3.4}$$

由此得

$$\begin{aligned}g_\alpha&=\varphi_{\alpha,x}(u)=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)\varphi_{\beta,x}(u)\\&=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)g_\beta\\&=\lambda_{\alpha\beta}(x)g_\beta\end{aligned} \tag{8.3.5}$$

$$\lambda_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)=g_\alpha g_\beta^{-1} \tag{8.3.6}$$

$\lambda_{\alpha\beta}(x)$称为转换函数。

为探讨群 G 对主丛的右作用与转换函数 $\lambda_{\alpha\beta}$之间的关系，我们可把(8.3.6)中的 u 都换成 $R_a u$。其规则是(见定义 8.3.1(ii))：

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,x}(u)\xrightarrow{G\text{ 群元素 }a\text{ 对主丛右作用}}\varphi_{\alpha,x}(R_a u)&=\varphi_{\alpha,x}(u)\cdot a\\&=g_\alpha\cdot a\end{aligned} \tag{8.3.7$_1$}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\beta,x}(u)\xrightarrow{G\text{ 群元素 }a\text{ 对主丛右作用}}\varphi_{\beta,x}(R_a u)&=\varphi_{\beta,x}(u)\cdot a\\&=g_\beta\cdot a\end{aligned} \tag{8.3.7$_2$}$$

所以 $\lambda_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)\xrightarrow{G\text{ 群元素 }a\text{ 对主丛右作用}}\varphi_{\alpha,x}(R_a u)$

$$\begin{aligned}&\cdot\varphi_{\beta,x}^{-1}(R_a u)\\&=\varphi_{\alpha,x}(u)a\cdot a^{-1}\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)\\&=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)\\&=\lambda_{\alpha\beta}(x)\end{aligned} \tag{8.3.8}$$

可见“转换函数 $\lambda_{\alpha\beta}(x)$”不因“G 群对主丛的右作用”而改变！

从图 8.3.2 和图 8.3.3 还看到，主丛是由底流形 M，李群 G(作为纤维)和投影映射 Π 组成的，所以主丛 P 可以记为 $P(MG\Pi)$，并且用图 8.3.4 代表主丛的内部关系。

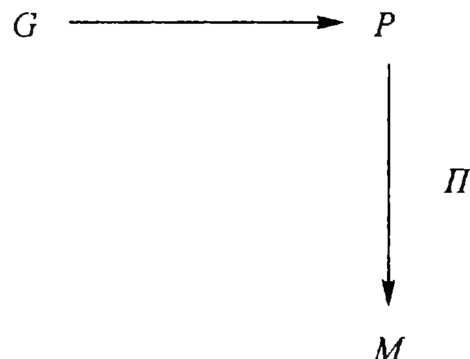


图 8.3.4

从(8.3.8)式得知，$\lambda_{\alpha\beta}(x)$也是属于 G 群的，因为从(8.3.2)，(8.3.3)式看到，$\varphi_{\alpha,x}(u)\in G$，$\varphi_{\beta,x}(u)\in G$，所以

$$\lambda_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\alpha,x}(u)\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)\in G \qquad (8.3.9)$$

它要满足相容条件，以保证各个开集 U_α，U_β，U_γ，…光滑地黏接：

$$\begin{aligned}&\lambda_{\alpha\alpha}(x)=1 && x\in U_\alpha\\ &\lambda_{\alpha\alpha}(x)=\lambda_{\beta\beta}(x) && x\in U_\alpha\cap U_\beta\\ &\lambda_{\alpha\beta}(x)\cdot\lambda_{\beta\gamma}(x)=\lambda_{\alpha\gamma}(x) && x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_r\end{aligned} \qquad (8.3.10)$$

于是转换函数的集合形成纤维丛(主丛)的结构群$\{\lambda_{\alpha\beta}(x)\}\subset G$。

当 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，则 $\Pi^{-1}(x)$上 u 点可分别通过 $\varphi_{\alpha,x}$和 $\varphi_{\beta,x}$向 G 中的 g_α 和 g_β 同胚映射，见(8.3.4)式和(8.3.5)式。

于是可利用 G 群的群元 a 对标准纤维 G 右乘，以定义 a 对整个主丛 P 的右乘。为了说明这一点，我们就利用(8.3.4)式：

$$\begin{aligned}&\varphi_{\alpha,x}(R_a u)=\varphi_{\alpha,x}(u)\cdot a=g_\alpha\cdot a\\ &\rightarrow R_a u=\varphi_{\alpha,x}^{-1}(u)g_\alpha\cdot a\\ &\varphi_{\beta,x}(R_a u)=\varphi_{\beta,x}(u)\cdot a=g_\beta\cdot a\\ &\rightarrow R_a u=\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)g_\beta\cdot a\end{aligned} \qquad (8.3.11)$$

可见 $R_a u$ 既可等于 $\varphi_{\alpha,x}^{-1}g_\alpha\cdot a$，又可等于 $\varphi_{\beta,x}^{-1}g_\beta\cdot a$。这就说明了 G 群的群元 a 对主丛 P(以 u 代表主丛)的右乘(即 $R_a u$)是作用于整个 G 的，$\varphi_{\alpha,x}^{-1}(u)g_\alpha$(或 $\varphi_{\beta,x}^{-1}(u)g_\beta$)中的 α(或 β)所代表的是 G 群中的每一个群指标。也就是说，α(或 β)代表了整个 G 群，如果把 G 群所作用的每一个轨道看做是一个点，就可得

$$P/G=M \qquad (8.3.12)$$

M 就是主丛 P 的底流形，所以在图 8.3.4 中，应该取 $M=P/G$。

总之，$R_a u$ 是作用于整个 G 的，可以整体定义群 G 对主丛 P 右作用后，不会改变丛的结构群，不会影响丛的整体拓扑结构。又因 $\lambda_{\alpha\beta}(x)$在各个开集 U_α，U_β，U_r，…上是相同的，所以也不会影响交叠区纤维的光滑黏接。

3. 伴向量丛 $E(M,F,G,\Pi,P)$

设 $P(M,G,\Pi)$是一个主丛，简写为 P;G 代表主丛 P 的纤维，同时也是主丛 P 的结构群。又设 F 是一个向量空间，G 也可以对 F 起作用。于是，可以定义直积丛 $P\times F$。在直积丛 $P\times F$ 中，任何一点都可以写成(p,f)：$p\in P,f\in F$。

p 是主丛 P 上的一个点，它对应于 G 中的一个群元，f 是 F 向量空间中的一个向量，主丛中的 G 的群元 g 可以对 f 起作用。

于是定义主丛的 G 群和群元素 $g\in G$ 对直积丛 $P\times F$ 的作用方式如下：

$$G:P\times F\rightarrow P\times F$$

$$g:(p,f)\rightarrow(pg,g^{-1}f)$$

就是说，G 对 F 的作用是由 G 对 P 的作用诱导出来的，$g\in G$ 在 P 上右作用的同时，又在 F 上给出 g^{-1}右作用，把 $P\times F$ 上的点(p,f)与通过群作用相联系的点$(pg,g^{-1}f)$看作是等价的，即$(p,f)\Longleftrightarrow(pg\cdot g^{-1}f)$，把每个等价类看成一个点，则有：

$$\{(pg,g^{-1}f)\}=\{(\bar{p},\bar{f})\}=(P\times F)/G \tag{8.3.13}$$

这样得到的底流形称为主丛 P 的伴向量丛 E(简称伴主丛)：

$$E=(P\times F)/G \tag{8.3.14}$$

§8.4 其他各种纤维丛举例

1. 拖回丛

设 E 是底流形 M 上的一个纤维丛，F 是纤维；又设 f 是关于底流形的一个映射，它可以把另一个流形 M'映射到 M：

$$f:M'\rightarrow M$$

$$x' \to x = f(x') \tag{8.4.1}$$

其中 $f(x')$ 具体规定了 M' 上的 x' 映射到 M 上的 $x=f(x')$。于是可以在底流形 M' 上向建立一个纤维丛，规定 M' 上的 x' 点的纤维就是 M 上的 $x=f(x')$ 点的纤维。由此得到的纤维丛记作 E'，于是可以定义 f^*：

$$E' = f^* E$$

或

$$E' \xleftarrow{f^*} E$$

$$F_{f(x')} \xleftarrow{f^*} F_x \tag{8.4.1$_1$}$$

$E'=f^*E$ 就称为拖回丛。

若 $M=M'$，$f(x)=x$，则 $f^*E=E$。

2. 等价丛与同伦映射

如果 h 和 g 是从 M' 到 M 的两个映射（h^*E 一般与 g^*E 不相同），并存在一个带参数 α 的 $H(x',\alpha)$，α 可以平滑地从 0 变到 1，$H(x',\alpha=0)=h(x')$，$H(x',\alpha=1)=g(x')$，则映射 h 和 g 就是相互同伦的，或称等价的。h^*E 和 g^*E 互为等价丛（相互同构）。

定理 8.4.1　如果底流形 M 是可以收缩的，则在 M 上建立的纤维丛必定是平凡的（同构于 $M\times F$）。①

证明　因为 M 可收缩到任意小的 M'，包括缩到一个点 $M'=x_0$，这意味着 M' 上没有特殊的拓扑结构，所以 M 收缩到 M' 后，纤维丛就是 $E'=M'\times F$。再定义**恒等映射** h，$h(x')=x'$（x' 不变）和**常映**

---

① R^n 中的实心坐标球和 S^n 上减去一点的流形，都是可收缩成一点的流形。

射 g，$g(x)=x_0$（M 上所有的点都收缩到 x_0），则 M 可收缩意味着映射 h 和映射 g 同伦。利用 h^* 是 h 之逆，g^* 是 g 之逆，得知 E 与 $M\times F$ 等价，所以 E 必定平凡：

$$E=h^*E\xleftarrow{\text{同伦等价}}M\times F=g^*E'$$

由定理 8.4.1 可知，只有在底流形不可收缩的情况下，才能得到非平凡的纤维丛。最简单的不可收缩的流形为 n 维球 S^n（$n=1,2,3,4,\cdots$）。

3. 平凡丛

平凡丛整体拓扑性质等同于 $E=M\times F$ 的拓扑性质。

定理 8.4.2 当且仅当主丛 P 有一个整体光滑截面时，主丛是平凡的。（证明略）

定理 8.4.3 如果向量丛 E 有处处非零的整体截面，且线性独立截面的最大集合等于纤维的维数 k，则向量丛 E 平凡。（证明略）

4. 线丛

线丛也是一种向量丛，它的纤维是一维的向量空间。

如果把 Möbius 带的[$-1,1$]区间换成实的直线 R，就可得到一个以圆周为底流形的非平凡的实线丛。

如果把[$-1,1$]区间换成复数 C，则所得到的线丛与 $S^1\times C$ 同构，是一个平凡的复线丛。

5. 切丛和余切丛

设有 n 维实流形 M 在 M 的邻域 U 上取定了局域坐标系 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则可定义底流形 M 上的切丛 $T(M)$ 为实的向量丛，

它在 $x\in M$ 点的纤维取为 x 点的切空间 $T_x(M)$；又可定义底流形 M 上的余切丛 $T^*(M)$也是实的向量丛，它在 $x\in M$ 点的纤维取为 x 点的余切空间 $T_x^*(M)$，并且可定义标准基如下。

切丛 $T(M)$的标准基：$\{\partial/\partial x,\cdots,\partial/\partial x_n\}$

余切丛 $T^*(M)$的标准基：$\{\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n\}$

若 U^a,U^b 是 M 上两个相交的邻域，U^a,U^b 上的坐标分别写成 x_i^a，x_j^b，则 $U^a\cap U^b$ 区域中的标准基的变换是

切丛：$\dfrac{\partial}{\partial x_i^a}=\dfrac{\partial x_j^b}{\partial x_i^a}\dfrac{\partial}{\partial x_j^b}$

余切丛：$\mathrm{d}x_i^a=\dfrac{\partial x_i^a}{\partial x_j^b}\mathrm{d}x_j^b$

§ 8.5　万有丛和分类空间

底流形 M 和纤维 F 给定后，可能形成多少种不等价的纤维丛？本节将探讨这个问题。（等价的概念和等价丛的定义见 § 8.4）

前已知标架丛 $L(E)$的纤维是一个群流形，所以实际上 $L(E)$就是一种主丛，称为向量丛 E 的伴主丛。一般向量丛 E 的向量空间的转移也都需要引入结构群 G。伴向量丛 E 又简称伴主丛，它也决定于结构群 G。总的来看，在给定底流形 M 和纤维空间 F 之后，所有的伴丛（包括标架丛、一般向量丛、伴主丛等）的结构都与主丛（特别是主丛的结构群性质）密切相关，因此先要研究主丛的分类问题，分析一下在 M 和群 G 给定之后，有多少个不等价的主丛。

一般来说，对于具有相同结构群的主丛进行分类，主要是利用同伦群的分析。

定义 8.5.1　设 M 是一个纤维的底流形，它上面的**转移函数族**

$\{g_{ij}\}$(或称**构造函数族**)表达了局部纤维空间与底流形 M 拼黏成为纤维丛整体的全过程。另外又取一个连续映射 $f:M\to M'$,则得到另一个函数族$\{g_{ij}\cdot f\}$。它表达的是局部纤维空间与底流形 M' 拼黏成为另一个纤维丛整体的全过程,这样得到的 M' 上的纤维丛就称为**诱导丛**。

定义 8.5.2 如果空间 X 上的每个开覆盖都有一个有限子集族仍是 X 的覆盖,则 X 称为**紧空间**。紧空间上相互同伦的映射诱导出相同的丛。

以下我们探讨主 G 丛的分类。有一种特殊而又重要的主 G 丛 $\xi(G)$,它的特殊之处是所有别的以 G 为构造群的主 G 丛都是这个特殊的主 G 丛 $\xi(G)$ 的一个诱导丛。

对于 $\xi(G)$ 也有一个与图 8.3.4 类似的反映主 G 丛内部关系的图(见图 8.5.1)。

图中与图 8.3.4 的底流形 M 对应的是底流形 B_G,$\xi(G)$ **丛称为万有丛**,它有一个特点,就是它的各阶同伦群为零:

$$\Pi_k(\xi)=0,\qquad k\text{ 为正整数} \tag{8.5.1}$$

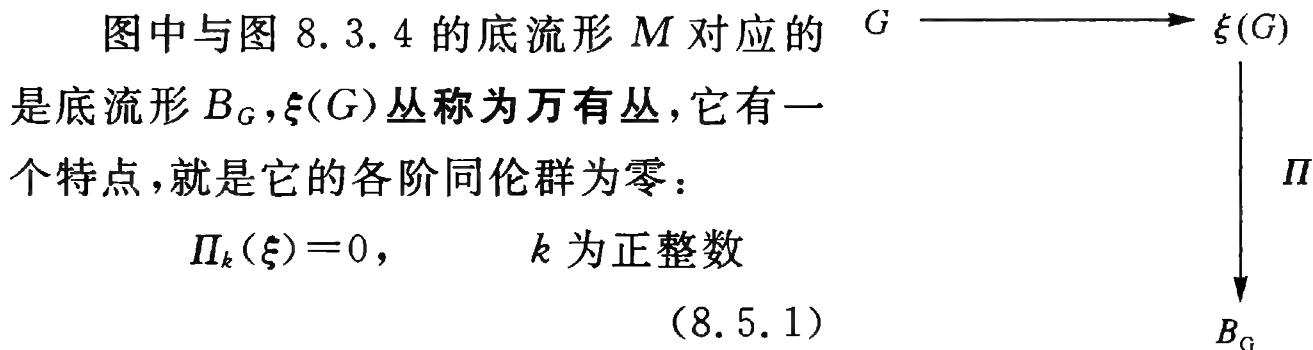


图 8.5.1

还有一种情况,即 $\xi(G)$ 仅满足下列条件:

$$\Pi_k(\xi)=0,\qquad k\leqslant n+1 \tag{8.5.2}$$

这种情况的 $\xi(G)$ 就称为 n-万有丛,记作 $\xi(n,G)$。

如果由流形 M 到 B_G 可以定义连续映射

$$f:M\to B_G \tag{8.5.3}$$

那么,以 M 为底流形的主丛 $P(M,G)$ 就将与万有丛 $\xi(G)$ 的拖回丛

$f^*\xi(G)$同构：

$$P(M,G)\cong f^*\xi(G) \tag{8.5.4}$$

可类似(8.5.3)式写成

$$\begin{aligned} &f^*: B_G \to M \\ &f^*: \xi(G) \to P(M,G) \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

于是流形 M 上以 G 为结构群的各种主丛等价类的集合，包括 $f^*\xi(G)$，$g^*\xi(G)$，$h^*\xi(G)$，…（如图 8.5.2 所示）与由 M 到 B_G 的各种连续映射 $f,g,h,\cdots$ 所代表的同伦类的集合之间，必定存在 1∶1 对应关系，这就是**主丛分类定理**。流形 B_G 称为**分类空间**。

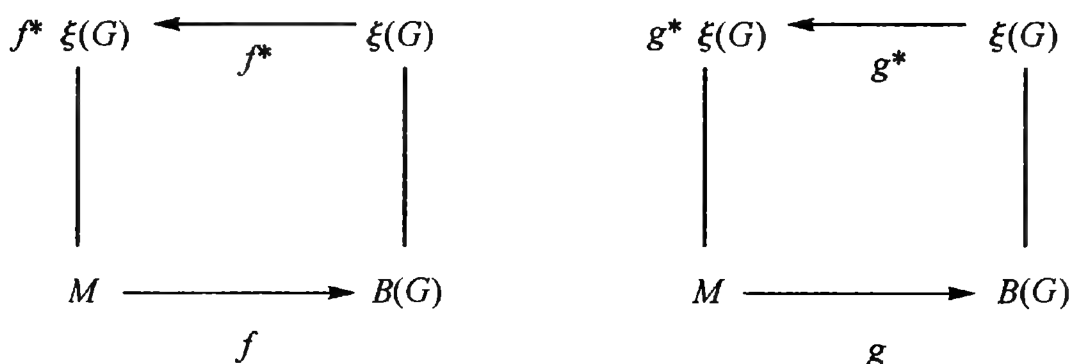


图 8.5.2

若流形 M 的维数小于 n，则可用 $\xi(n,G)$ 代替 $\xi(G)$，也能得到类似定理，因为不涉及维数大于 n 的流形。

向量丛的分类总的来说完全决定于主丛的分类，也可找到万有向量丛（细节略去）。

根据定理 8.4.1 又可得到一个结论，就是非平凡丛的底流形 M 必须是不可收缩成为一点的。最简单的不可收缩流形是 n 维球 S^n，以 S^n 为底流形的纤维丛有可能非平凡（$n>0$）。

以下举一个 $M=S^4$ 的例子，即 Yang-Mills 瞬子。它是一个取 $SU(2)$ 群为纤维，以 S^4 为底流形的主丛，有以下特点：

$M=S^4$　　　　　　　有 4 个实坐标 r,θ,φ,ψ

$SU(2)$群流形是 S^3　　　有 3 个 $SU(2)$ 群参量 α,β,r

可把 S^4 分成两个半球 H_+，H_-，则 H_+，H_- 都是可收缩的，它

们的边界就是 S^3，H_+ 和 H_- 上的坐标和纤维 $SU(2)$ 群的参量分别是

$$\begin{aligned} &H_+ \times SU(2) \qquad (r,\theta,\varphi,\psi;\alpha_+,\beta_+,r_+) \\ &H_- \times SU(2) \qquad (r,\theta,\varphi,\psi;\alpha_-,\beta_-,r_-) \end{aligned} \tag{8.5.8}$$

把 H_+，H_- 稍微延伸一下，就形成 $H_+ \cap H_-$ 交叠区：

$$H_- \cap H_- = L \times S^3 \tag{8.5.9}$$

其中 L 可以无限缩小，从而 $H_+ \cap H_-$ 交叠区与 S^3 同伦。H_+ 上开覆盖之间的转移函数与 H_- 上开覆盖之间的转移函数是一致的，记作

$$g_{+,-} \in SU(2) \tag{8.5.10}$$

注意到 $SU(2)$ 的群流形是 3 维的（因为群流形是 S^3），所以(8.5.10)式中的 $g_{+,-} \in SU(2)$ 也是 3 维的，而且 $g_{+,-}$ 形成 $H_+ \cap H_-$ 交叠区 S^3 上的 3 维环路。根据(6.5.1)式，取 $n=3$，则有

$$\Pi_3(S^3) = z \rightarrow \Pi_3(SU(2)) = z \tag{8.5.11}$$

所以 $g_{+,-}$ 可以按 $SU(2)$ 群的三阶同伦群 $\Pi_3(SU(2)) = z$ 式中的整数 z 的取值来对 S^4 上的 $SU(2)$ 群主丛进行分类。

推广到 S^n 上的主 G 丛，可类似上述 $M=S^4$ 的例子，用 $n-1$ 阶同伦群 $\Pi_{n-1}(G)$ 来进行分类。

第 9 章　纤维丛上的联络与曲率

§9.1　一般向量丛上的联络

设有一般向量丛 $E(M,F,\Pi,G)$，向量空间的维数是 k，则在底流形 M 的每一个邻域 U 上，都可选取一个局域的向量丛标架 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，并把 $\Pi^{-1}(U)=U\times F$ 上的向量丛的截面 $S(x)$ 写成如下的向量函数：

$$S(x)=\sum_{i=1}^{k} e_i(x)z^i(x) \tag{9.1.1}$$

其中 $e_i(x)$ 代表 x 点的纤维空间向量丛标架，$z^i(x)$ 代表 x 点的向量丛截面的第 i 个分量。

在向量丛 E 中，切空间 $T(E)$ 和余切空间 $T^*(E)$ 的局域基矢为

$$T(E):\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu},\frac{\partial}{\partial z^i}\right);\quad T^*(E):(\mathrm{d}x^\mu,\mathrm{d}z^i)①$$

以下我们对向量丛上的联络的几种相互等价的定义作一些考察。

1. 由平行输运给出的定义

设 $x(\tau)$ 是 M 中的一条曲线，向量场 $S(x)$ 是向量丛 E 上的一个

---

① $i,j=1,2,\cdots,k$ 是向量空间的坐标；$\mu,\nu,\cdots$ 是底流形 M 上的坐标。

截面。若 $S(x(\tau))$满足如下的微分方程：

$$\nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}(S)=0 \tag{9.1.2}$$

则称 $S(x)$沿 $x(\tau)$平行输运。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$就是沿 $x(\tau)$方向的向量。

根据第 3 章式(3.1.9)中第一式，由于$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$和 e_μ 是同类向量，所以有

$$\nabla e_\mu(x)=\Gamma_\mu^\nu(x)e_\nu(x)\quad(\Gamma_\mu^\nu(x)=\Gamma_{\lambda\mu}^\nu(x)\mathrm{d}x^\lambda) \tag{9.1.3}$$

又根据第 3 章(3.1.13)式，得

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}}(e_i)&=\langle\nabla e_i,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle\\&=\langle e_j\Gamma_{\mu i}^j\mathrm{d}x^\mu,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle=e_j\Gamma_{\nu i}^j(x)\end{aligned} \tag{9.1.4}$$

于是，利用(9.1.1)式，可把(9.1.2)式写成：

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}(S)&=\nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}(e_iz^i)=(\nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}e_i)z^i+e_i(\nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}z^i)\\&=\langle e_j\Gamma_{\mu i}^j\mathrm{d}x^\mu,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle z^i+e_i\langle\frac{\partial z^i}{\alpha x^\mu}\mathrm{d}x^\mu,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle\\&=e_j\Gamma_{\nu i}^j\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\cdot z^i+e_i\frac{\partial z^i}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\\&=\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}e_j(\Gamma_{\nu i}^jz^i+(\frac{\partial z^j}{\partial x^\nu})=0\end{aligned} \tag{9.1.5}$$

与第 3 章(3.1.7)，(3.1.8)式对照，当 $X=\xi^a\frac{\partial}{\partial x^a}$平行输运时，要求 $\nabla X=\nabla\xi^a\frac{\partial}{\partial x^a}=\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}+\Gamma_{ib}^a\xi^b\right)\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^b}=0$，这与(9.1.5)式的平行输运在形式上完全相同，只是把 ξ^a 和 ξ^b 换成了 z^i 和 z^j，所以我们定义 $\Gamma_{\mu i}^j$就是向量丛中的联络。

2. 由切空间出发的定义

设底流形 M 上有一条曲线 $x(\tau)$，我们可以把它提升到向量丛

$E(M,F,\Pi,G)$中去。提升后的曲线记作 $c(\tau)$,$c(\tau)$上每一点的坐标应该既包括 $x^\mu(\tau)$,又包括 $z^i(\tau)$,所以提升到 E 上以后,E 上的曲线应写成:

$$c(\tau)=(x^\mu(\tau),z^i(\tau)) \qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{9.1.6}$$

沿 $c(\tau)$的微分则应定义为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{9.1.7}$$

按照 Levi-Civita 平行输运规则,$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}\tau}$应满足以下的平行输运方程:

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}\tau}+\Gamma^i_{\mu j}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}z^j=0 \tag{9.1.8}$$

代入(9.1.7)式就得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}&=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma^i_{\mu j}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}\\&=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma^i_{\mu j}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}\right)=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{D}_\mu\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

其中

$$\mathrm{D}_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma^i_{\mu j}z^j\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{9.1.10}$$

D_μ 就是切空间 $T(E)$中的协变微分,$\Gamma^i_{\mu j}$则是切空间 $T(E)$中的联络。

从(9.1.10)式还看到,$T(E)$分解为两个部分:

$$T(E)=V(E)\oplus H(E) \tag{9.1.11}$$

其中,V 代表基矢$\frac{\partial}{\partial z^i}$,称为切空间的垂直部分 $V(E)$;H 代表基矢 $\mathrm{D}_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma^i_{\mu j}z^j\frac{\partial}{\partial z^i}$,称为切空间的水平部分 $H(E)$。H 中的基矢 D_μ 可看作是流形 M 上的向量算符$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$在流形 E 上的水平提升。

3. 由余切空间出发的定义

考察余切空间 $T^*(E)$中的一个 1-形式：

$$w^i = dz^i + \Gamma^i_{\mu j} dx^\mu z^j \qquad (9.1.12)$$

它具有如下特性：

(1) $$\langle w^i, D_\mu \rangle = \langle dz^i + \Gamma^i_{\nu j} dx^\nu z^j, \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^k_{\mu q} z^q \frac{\partial}{\partial z^k} \rangle$$

$$= -\Gamma^i_{\mu q} z^q + \Gamma^i_{\mu j} z^j = 0 \qquad (9.1.13)$$

(2) $$\langle w^i, \frac{\partial}{\partial z^j} \rangle = \langle dz^i + \Gamma^i_{\nu j} dx^\nu z^j, \frac{\partial}{\partial z^j} \rangle = \delta^i_j \qquad (9.1.14)$$

式(9.1.13)和式(9.1.14)表明:余切空间 $T^*(E)$中的 1-形式 w^i 与切空间 $T(E)$中的水平部分($D_\mu \in H(E)$)正交;w^i 与切空间 $T(E)$中的垂直部分$\left(\frac{\partial}{\partial z^j} \in V(E)\right)$有式(9.1.14)所显示的$\langle w^i, \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle = \delta^i_j$ 的关系。

(9.1.12)式引入的 1-形式 $\Gamma^i_{\mu j} dx^\mu$ 就是一般向量丛的联络 1-形式。例如,取 $S = e_i z^i$,则有

$$\nabla(S) = \nabla(e_i z^i) = e_i(\nabla z^i) + (\nabla e_i) z^i$$

$$= e_i dz^i + \Gamma^j_i e_j z^i \qquad (\Gamma^j_i = \Gamma^j_{\mu i} dx^\mu) \qquad (9.1.15)$$

4. 由标架变换出发的定义

作标架变换：

$$e'_j = e_i (f^{-1})^i_j(x), \quad z'^i = f^i_j(x) z^j \qquad (9.1.16)$$

截面 $S(x)$是不变的：

$$S(x) = e_i(x) z^i(x) = e'_i(x) z'^i(x) = S'(x) \qquad (9.1.17)$$

由于 $e_i(x)$的变换性质与切向量$\frac{\partial}{\partial x^i}$的变换性质相同,所以根据式(3.1.9)中第一式,再利用式(9.1.16),有：

$$\begin{aligned}\nabla e'_j(x) &= \nabla(e_i(f^{-1})^i_j(x)) \\ &= \nabla e_i \cdot (f^{-1})^i_j + e_i \cdot \nabla(f^{-1})^i_j \\ &= e'_i(x)\Gamma'^i_j = e_k(x)\cdot(f^{-1})^k_i\Gamma'^i_j \end{aligned} \tag{9.1.18}$$

再利用一次式(3.1.9)中第一式,则自(9.1.18)式得

$$\nabla e_i \cdot (f^{-1})^i_j + e_i \cdot \nabla(f^{-1})^i_j = e_k \cdot (f^{-1})^k_i \Gamma'^i_j$$

$$\rightarrow e_k\Gamma^k_i \cdot (f^{-1})^i_j + e_k \cdot \nabla(f^{-1})^k_j = e_k(f^{-1})^k_i\Gamma'^i_j \tag{9.1.19}$$

由于 e_k 各自互相独立,所以(9.1.19)式又给出

$$\Gamma^k_i(f^{-1})^i_j + \mathrm{d}(f^{-1})^k_j = (f^{-1})^k_i\Gamma'^i_j \tag{9.1.20}$$

$$(f)^q_k\Gamma^k_i(f^{-1})^i_j + (f)^q_k\mathrm{d}(f^{-1})^k_j = \Gamma'^q_j \tag{9.1.21}$$

Γ^k_i 与 Γ'^q_j 之间的变换——式(9.1.21)显然不是一个张量类型的变换。

我们来看一看规范场的规范变换:

$$T^aA^a_\mu \rightarrow T^aA^{a'}_\mu = \mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}\left[T^aA^a_\mu - \frac{i}{g}\mathrm{e}^{i\theta^t T^t}\partial_\mu(\mathrm{e}^{-i\theta^t T^t})\right]\mathrm{e}^{i\theta^t T^t}$$

$$\rightarrow \mathrm{e}^{i\theta^t T^t}T^aA^{a'}_\mu\mathrm{e}^{-i\theta^t T^t} = T^aA^a_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\mathrm{e}^{i\theta^t T^t}\partial_\mu\mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}$$

$$\rightarrow T^aA^{a'}_\mu = \mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}T^aA^a_\mu\mathrm{e}^{i\theta^t T^t} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}\mathrm{e}^{i\theta^t T^t}$$

取

$$U = \mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}, \qquad U^{-1} = \mathrm{e}^{i\theta^t T^t} \tag{9.1.22}$$

$$T^aA^{a'}_\mu = UT^aA^a_\mu U^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{g}U\cdot\partial_\mu U^{-1} \tag{9.1.23}$$

将式(9.1.21)与式(9.1.23)对比发现,$T^aA^{a'}_\mu$,$T^aA^a_\mu$ 分别与 Γ',Γ 相对应;U,U^{-1} 分别与 $\mathrm{e}^{-i\theta^t T^t}$,$\mathrm{e}^{i\theta^t T^t}$ 相对应。

由此可见,式(9.1.21)中的 $\Gamma^k_i \rightarrow \Gamma'^q_j$ 的变换正好和规范场 $T^aA^a_\mu \rightarrow T^aA^{a'}_\mu$ 的变换相类似,但决不是张量变换。于是,联络 1-形式 Γ^i_j 也可以根据(9.1.21)的变换来定义。

在交叠区 $U\cap U'$,已知 $S(x)=S'(x)$(见(9.1.17)式),还可证明

$\nabla(S)=\nabla(S')$。证明如下：

根据式(9.1.15),(9.1.16)和式(9.1.21)：

$$\begin{aligned}\nabla(S') &= e'_j \mathrm{d}z'^j + e'_i \Gamma'^i_j z'^j \\ &= e_i (f^{-1})^i_j \mathrm{d}(f^j_k z^k) + e_q (f^{-1})^q_j (f^i_k \Gamma^k_m (f^{-1})^m_j \\ &\quad + f^i_k \mathrm{d}(f^{-1})^k_j) f^j_k z^k \\ &= e_i \delta^i_k \mathrm{d}z^k + e_i (f^{-1})^i_j (\mathrm{d}f^j_k) z^k \\ &\quad + e_q \delta^q_k \Gamma^k_m \delta^m_k z^k + e_q \delta^q_k \mathrm{d}(f^{-1})^k_j f^j_k z^k \\ &= e_k \mathrm{d}z^k + e_i (f^{-1})^i_j (\mathrm{d}f^j_k) z^k \\ &\quad + e_k \Gamma^k_m z^m + e_i (\mathrm{d}f^{-1})^i_j f^j_k z^k \\ &= e_k \mathrm{d}z^k + e_k \Gamma^k_m z^m = \nabla(S) \end{aligned} \tag{9.1.24}$$

由于式(9.1.17)和式(9.1.24)证实了 $S(x)=S'(x)$ 和 $\nabla(S)=\nabla(S')$，即 $S(x)$ 和 $\nabla(S)$ 都不受坐标系变换的影响，所以在两个邻域 U 和 U' 中以及它们的交叠区 $U\cap U'$ 中，都可以对 $S=e_i z^i$ 和 $\nabla(S)=e_k \mathrm{d}z^k + e_k \Gamma^k_m z^m$ 作出与标架的选择无关的自洽的定义。

§9.2 有关向量丛上曲率的几个说明

1. 曲率张量

根据(9.1.10)式，求出$[\mathrm{D}_\mu,\mathrm{D}_\nu]$如下：

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}_\mu,\mathrm{D}_\nu] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\mu j} z^j \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \Gamma^k_{\nu q} z^q \frac{\partial}{\partial z^k}\right] \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^k_{\nu q}\right) z^q \frac{\partial}{\partial z^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^i_{\mu j}\right) z^j \frac{\partial}{\partial z^i} \\ &\quad + \Gamma^i_{\mu j}\Gamma^k_{\nu i} z^j \frac{\partial}{\partial z^k} - \Gamma^k_{\nu q}\Gamma^i_{\mu k} z^q \frac{\partial}{\partial z^i} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^i_{\nu j} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^i_{\mu j} + \Gamma^i_{\mu k}\Gamma^k_{\nu j} - \Gamma^i_{\nu k}\Gamma^k_{\mu j}\right) z^j \frac{\partial}{\partial z^i}\end{aligned}$$

$$= -R^i_{j\mu\nu} z^j \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{9.2.1}$$

$$R^i_{j\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^i_{\nu j} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^i_{\mu j} + \Gamma^i_{\mu k}\Gamma^k_{\nu j} - \Gamma^i_{\nu k}\Gamma^k_{\mu j} \tag{9.2.2}$$

$R^i_{j\mu\nu}$就是向量丛的曲率张量。

此时出现了一个有趣的现象：按照(9.1.11)式的定义，D_μ，D_ν 都是切空间水平部分的基矢；$\frac{\partial}{\partial z^i}$，$\frac{\partial}{\partial z^k}$都是切空间垂直部分的基矢。而且垂直部分的基矢与水平部分的基矢是互相独立的。然而(9.2.1)式却证明了水平部分的基矢 D_μ，D_ν 对易后必定得到垂直部分的基矢$\frac{\partial}{\partial z^i}$。

2. Γ^i_j 的纯规范形式

$R^i_{j\mu\nu}=0$ 时 Γ^i_j 可写成纯规范形式：

设存在局域平的标架，$e_j{}'=e_i(f^{-1})^i_j$ 满足 $\nabla e_j{}'=0$，则有

$$(\nabla e_i)(f^{-1})^i_j + e_i(\nabla f^{-1})^i_j = 0$$

$$\rightarrow e_k\Gamma^k_i(f^{-1})^i_j + e_i(\mathrm{d}f^{-1})^i_j = 0$$

由于 e_i，e_k 互相独立，所以

$$\Gamma^k_i(f^{-1})^i_j + (\mathrm{d}f^{-1})^k_j = 0$$

右乘 f^j_q，则有

$$\Gamma^k_q = -(\mathrm{d}f^{-1})^k_j f^j_q = (f^{-1})^k_j(\mathrm{d}f)^j_q \tag{9.2.3}$$

所以

$$\Gamma^k_{\mu q} = (f^{-1})^k_j \frac{(\partial f)^j_q}{\partial x^\mu} = -f^j_q\left(\frac{\partial f^{-1}}{\partial x^\mu}\right)^k_j \tag{9.2.4}$$

(9.2.3)，(9.2.4)式的右方都是纯规范形式[①]。

再把(9.2.4)式代入(9.2.2)式，得

① $g^{-1}\mathrm{d}g$ 形式称为纯规范形式。

$$
\begin{aligned}
R^i_{j\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left((f^{-1})^i_q \frac{(\partial f)^q_j}{\partial x^\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left((f^{-1})^i_q \frac{(\partial f)^q_j}{\partial x^\mu}\right) \\
&\quad + \left((f^{-1})^i_q \frac{(\partial f)^q_k}{\partial x^\mu}\right)\left((f^{-1})^k_m \frac{(\partial f)^m_j}{\partial x^\nu}\right) \\
&\quad - \left((f^{-1})^i_q \frac{(\partial f)^q_k}{\partial x^\nu}\right)\left((f^{-1})^k_m \frac{(\partial f)^m_j}{\partial x^\nu}\right) \\
&= \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\mu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\nu} + (f^{-1})^i_q \frac{(\partial^2 f)^q_j}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\
&\quad - \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\nu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\mu} - (f^{-1})^i_q \frac{(\partial^2 f)^q_j}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \\
&\quad - \left(\frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\mu} f^q_k\right)\left((f^{-1})^k_m \frac{\partial f^m_j}{\partial x^\nu}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\nu} f^q_k\right)\left((f^{-1})^k_m \frac{\partial f^m_j}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\mu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\nu} - \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\nu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\mu} \\
&\quad - \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\mu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\nu} + \frac{\partial (f^{-1})^i_q}{\partial x^\nu}\frac{\partial (f)^q_j}{\partial x^\mu} = 0
\end{aligned} \tag{9.2.5}
$$

由此可见，如果向量丛的联络 Γ^i_k 取纯规范形式，则向量丛的曲率张量 $R^i_{j\mu\nu}=0$。

这个命题的逆也是成立的，就是说，如果 $R^i_{j\mu\nu}=0$，则 Γ^i_j 可写成一个如(9.2.3)式的纯规范形式。可以根据 Frobenius 定理证明这一点。(此处略去证明)

3. 向量丛上曲率 2-形式 Ω^i_j 的变换性质

自(9.1.24)式

$$\nabla(S)=e_i(\mathrm{d}z^i+\Gamma^i_j z^j)=e_i w^i$$

又自(9.1.12)式

$$w^i = \mathrm{d}z^i + \Gamma^i_{\mu j} z^j \mathrm{d}x^\mu$$

所以
$$\begin{aligned}\nabla^2(S) &= \nabla(e_i w^i) = \nabla e_i \wedge w^i + e_i \nabla w^i \\ &= e_j \Gamma^j_i \wedge w^i + e_i \mathrm{d}w^i \\ &= e_j \Gamma^j_i \wedge (\mathrm{d}z^i + \Gamma^i_k z^k) + e_i(\mathrm{d}\Gamma^i_j z^j - \Gamma^i_j \wedge \mathrm{d}z^j) \\ &= e_j(\mathrm{d}\Gamma^j_k + \Gamma^j_i \wedge \Gamma^i_k) z^k \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

利用(9.2.2)式得曲率 2-形式：

$$\begin{aligned}\Omega^i_j &= \frac{1}{2} R^i_{j\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^i_{\nu j} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^i_{\mu j} \\ &\quad + \Gamma^i_{\mu k}\Gamma^k_{\nu j} - \Gamma^i_{\nu k}\Gamma^k_{\mu j}\Big)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

(9.2.7)式又可写成

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{j\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j \tag{9.2.8}$$

如果 $R^i_{j\mu\nu}=0$，则 $\Omega^i_j=0$，此时

$$\mathrm{d}\Gamma^i_j = -\Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j \tag{9.2.9}$$

把(9.2.8)式代入(9.2.6)式，得

$$\nabla^2(S) = e_i \Omega^i_k z^k \tag{9.2.10}$$

这里，Ω^i_k 按照张量变换；e_i 和 z^k 分别按照协变规则和反变规则变换。可见 $\nabla^2(S) = e_i\Omega^i_k z^k$ 在标架变换下也是不变的。

§9.3　主丛上的联络

主丛 $P(MG\Pi)$ 的纤维是群 G。若选取局域坐标，则主丛 P 上的局域坐标应包括 (x,g)。其中 x 代表底流形 M 上的一个点；g 代表 G 群空间中的某一个群元，g_{ij} 则是群元 g 的矩阵元。

再设底流形 M 上有一条曲线 $x(\tau)$，把它提升到主丛 P 上去，则提升后的 G 群群元 g 的矩阵元应写成 $g_{ij}(t)$。这个 $g_{ij}(t)$ 是 t 的函

数,随 t 而变动。

由此出发,我们可以给出主丛 $P(MG\Pi)$ 上的联络的定义及其在不同场合的表现。

1. 主丛联络与平行输运

设 $x(t)$ 是 M 上一条曲线,截面 $g_{ik}(\tau)$ 沿 $x(\tau)$ 平行输运。仿照 Levi-Civita 平行输运规则(9.1.8)式,主丛上 $g_{ik}(\tau)$ 的平行输运应定义为

$$\frac{\mathrm{d}g_{ik}}{\mathrm{d}\tau}+A_{\mu}^{a}(x)\frac{(\lambda_a)_{ij}}{2!}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}g_{jk}=0 \tag{9.3.1}$$

与(9.1.8)式对照,在(9.1.8)式中 z^i 只有一个指标 i,在(9.3.1)式中 g_{ik} 有两个指标 i 和 k,所以必须引入 $A_{\mu}^{a}(x)(\lambda_a)_{ij}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}g_{jk}$ 以代替(9.1.8)式中的 $\Gamma_{\mu j}^{i}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}z^j$。$\lambda_a$ 和 λ_b 是主丛上的纤维 G 群生成元。若 $a\neq b$,则 λ_a 和 λ_b 是两个不同的独立的生成元,于是 $A_{\mu}^{a}(x)\cdot(\lambda_a)_{ij}\cdot\mathrm{d}x^{\mu}g_{jk}$ 收缩后只剩 i,k 指标,与(9.1.8)式收缩后只剩 i 指标相类似。

对照(9.3.1)式和(9.1.8)式,得知(9.1.8)式的 $\Gamma_{\mu j}^{i}$ 与(9.3.1)式的 $A_{\mu}^{a}(x)\frac{(\lambda_a)_{ij}}{2!}$ 扮演的是相同的角色,所以我们可以称

$$A_{\mu}^{a}(x)\frac{(\lambda_a)_{ij}}{2!} \tag{9.3.2}$$

为主丛上的联络。

由于(9.3.1)式中 $g_{ik}(t)$,$x(\tau)$ 和 $(\lambda_a)_{ij}$ 都已给定,故可解得 $A_{\mu}^{a}(x)$。

取 $a\in G$(a 是 G 群中的任意一个群元),则有如下右乘变换:

$$g'_{kj}=g_{ki}a_{ij},\quad g_{mn}=g'_{mq}a_{qn}^{-1} \tag{9.3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial g'_{ij}}=\frac{\partial g_{mn}}{\partial g'_{ij}}\frac{\partial}{\partial g_{mn}}=\frac{\partial g'_{mi}}{\partial g'_{qj}}a_{qn}^{-1}\frac{\partial}{\partial g_{mn}}=\delta_i^m\delta_j^q a_{qn}^{-1}\frac{\partial}{\partial g_{mn}}$$

$$=a_{jn}^{-1}\frac{\partial}{\partial g_{in}}$$

所以
$$g'_{qn}\frac{\partial}{\partial g'_{mn}}=g_{qj}a_{jn}a_{nk}^{-1}\frac{\partial}{\partial g_{mk}}=g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{mk}} \tag{9.3.4}$$

我们注意到(9.3.3)式是 a_{qj} 和 a_{qn}^{-1} 右乘，所以(9.3.4)式的等式

$$g'_{qn}\frac{\partial}{\partial g'_{mn}}=g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{mk}}$$

的性质简称为右不变性质。

2. 主丛联络与切空间

设底流形 M 上有一条曲线 $x(\tau)$，把它提升到主丛 $P(MG\Pi)$ 上去，就得到 P 上的曲线 $c(\tau)$。

类似于(9.1.6)式，$c(\tau)$ 可写成

$$c(\tau)=(x^\mu(\tau),g_{ij}(\tau))\qquad g\in G \tag{9.3.5}$$

$$\Pi(c(\tau))=x^\mu(\tau) \tag{9.3.6}$$

沿这条提升的曲线 $c(\tau)$ 的全微分是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \tag{9.3.7}$$

当主丛上的 $g_{ik}(\tau)$ 作平行输运，则自(9.3.1)式平行输运定义，得

$$\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}\tau}=-A_\mu^a(x)\frac{(\lambda_a)_{ik}}{2!}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}g_{kj}=\dot{g}_{ij} \tag{9.3.8}$$

把(9.3.8)式代入(9.3.7)式，就得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-A_\mu^a(x)\frac{(\lambda_a)_{ik}}{2!}g_{kj}\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\right)$$

$$=\dot{x}^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-A_\mu^a(x)\bar{\mathrm{L}}_a\right)=\dot{x}^\mu\mathrm{D}_\mu \tag{9.3.9}$$

其中

$$\overline{L}_a = \frac{(\lambda_a)_{ik}}{2!} g_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \tag{9.3.10}$$

(9.3.9)式中的 D_μ 就是主丛上的协变微分,定义为:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x)\overline{L}_a \tag{9.3.11}$$

回顾§9.1,一般向量丛的切空间 $T(E)$ 可分解为两个部分:$T(E)=V(E)\oplus H(E)$(见(9.1.11)式),其中 $V(E)$ 是垂直部分,$H(E)$ 是水平部分。与 $T(E)$ 相类似,主丛上的切空间 $T(P)$ 也可分解为两个部分:

$$T(P)=V(P)+H(P) \tag{9.3.12}$$

其中,V 为基矢 $\frac{\partial}{\partial g_{ij}}$,称为切空间 $T(P)$ 的垂直部分 $V(P)$;H 为基矢 $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x)\overline{L}_a$,称为切空间 $T(P)$ 的水平部分 $H(P)$。$H(P)$ 中的基矢 D_μ 可看作是流形 M 上的向量 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 在主丛 P 上的水平提升,D_μ 中的 $A_\mu^a(x)$ 则是主丛 P 上的联络。

根据(9.3.4)式和(9.3.10)式,$\overline{L}_a = \frac{(\lambda_a)_{ik}}{2i} g_{kj} \frac{\partial}{\partial (g^T)_{ji}}$ 具有右不变性质,所以(9.3.11)式中的 D_μ 也具有右不变性质。从而得知(9.3.12)式中 $T(P)=V(P)+H(P)$ 的分解也具有右不变性质。

这里,我们再次强调群的右不变性质,是因为切空间 $T(P)$ 的水平部分 $H(P)$ 是 G 群变换下不变的(因为 D_μ 中的 $\overline{L}_a$ 是 G 群变换右不变的,见(9.3.10)式和(9.3.4)式)。从而知道,$H(P)$ 和 $V(P)$ 的区分是唯一的,是 G 群变换下不变的。

再看一看联络 $A_\mu^a(x)$ 与主丛上的曲率 $F_{\mu\nu}^a$ 之间的关系:在(9.3.11)式中的 $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x)\overline{L}_a$ 中,$\overline{L}_a$ 不含 x^μ(见(9.3.10)式),所以

$$[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu]_- = -\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu^b(x)\right)\overline{\mathrm{L}}_b + \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu^a(x)\right)\overline{\mathrm{L}}_a + \left[A_\mu^a\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq} g_{qn}\frac{\partial}{\partial g_{mn}}, A_\nu^b\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{ij} g_{jk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}}\right]_- \tag{9.3.13}$$

g_{jk}是 g 矩阵的 j 行 k 列矩阵元,取偏微分时:

$$\frac{\partial}{\partial g_{mn}} g_{jk} = \delta_j^m \delta_k^n \tag{9.3.14}$$

于是(9.3.13)式第三项$[\quad]_-$等于:

$$\begin{aligned}
&\left[A_\mu^a\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq} g_{qn} A_\nu^b\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial g_{mn}} g_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial g_{ik}} - A_\nu^b\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{ij} g_{jk} A_\mu^q\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq}\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(\frac{\partial}{\partial g_{ik}} g_{qn}\right)\frac{\partial}{\partial g_{mn}}\right]\\
&= A_\mu^a A_\nu^b\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq}\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{ij} g_{qn}\delta_j^m\delta_k^n\frac{\partial}{\partial g_{ik}} - A_\nu^b A_\mu^a\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{ij}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq} g_{jk}\delta_q^i\delta_n^k\frac{\partial}{\partial g_{mn}}\\
&= A_\mu^a A_\nu^b\left(\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{im}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq} g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}} - \left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq}\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{qj} g_{jn}\frac{\partial}{\partial g_{mn}}\right)\\
&= A_\mu^a A_\nu^b\left(\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{im}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mq} g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}} - \left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{im}\left(\frac{\lambda_b}{2!}\right)_{mq} g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}}\right)\\
&= A_\mu^a A_\nu^b\left[\frac{\lambda_b}{2!}, \frac{\lambda_a}{2!}\right]_{-iq} g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}}\\
&= A_\mu^a A_\nu^b f_{bac}\left(\frac{\lambda_c}{2!}\right)_{iq} g_{qk}\frac{\partial}{\partial g_{ik}}\\
&= A_\mu^a A_\nu^b f_{bac}\overline{\mathrm{L}}_c\text{(利用(9.3.10)式)}
\end{aligned} \tag{9.3.15}$$

代入(9.3.13)式,得

$$\begin{aligned}
[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu]_- &= -\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu^a(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu^a(x) + f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)\right]\overline{\mathrm{L}}_a\\
&= -F_{\mu\nu}^a\overline{\mathrm{L}}_a
\end{aligned} \tag{9.3.16}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu^a - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{9.3.17}$$

随之而来的又有雅可比恒等式

$$[\mathrm{D}_\mu,[\mathrm{D}_\nu,\mathrm{D}_\lambda]]+[\mathrm{D}_\nu,[\mathrm{D}_\lambda,\mathrm{D}_\mu]]+[\mathrm{D}_\lambda,[\mathrm{D}_\mu,\mathrm{D}_\nu]]=0 \tag{9.3.18}$$

在底流形 M 为 4 维时,$\mu,\nu=1,2,3,4$,(9.3.18)式可写成

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[\mathrm{D}_\mu,[\mathrm{D}_\nu,\mathrm{D}_\lambda]]=0 \tag{9.3.19}$$

把(9.3.16)式代入

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[\mathrm{D}_\mu,F^a_{\nu\lambda}\bar{\mathrm{L}}_a]=0 \tag{9.3.20}$$

又因 $\bar{\mathrm{L}}_a(a=1,2,\cdots,k)$互相独立,所以自(9.3.20)式又得

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[\mathrm{D}_\mu,F^a_{\nu\lambda}]=0 \tag{9.3.21}$$

定义 9.3.1 $*F^a_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^a_{\lambda\rho}$, $*F^a_{\mu\nu}$是$F^a_{\lambda\rho}$的对偶张量。

由此定义,则又有

$$[\mathrm{D}_\mu,*F^a_{\mu\nu}]=0 \tag{9.3.22}$$

(9.3.21)式和(9.3.22)式是曲率张量必须满足的 Bianchi 等式,也是主丛上的联络必须满足的等式。

3. 主丛联络与余切空间

把底流形 M 上的余切空间记作 $T^*(M)$,则 $T^*(M)$所有的 1-形式都可写成$A=A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$。

令主丛的 G 生成元为λ_a(λ_a 是常数矩阵),则又可把 A 取作

$$A=A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu=A^a_\mu(x)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu \tag{9.3.23}$$

(9.3.23)式中并不包含主丛纤维 $F(\cong G)$的变量 g_{ij},所以(9.3.23)式中的 A 仍是属于$T^*(M)$的联络 1-形式。

如果要把 $T^*(M)$中的联络 1-形式扩充为 $T^*(P)$中的联络 1-

形式，则需要把(9.3.23)式扩充为既含有 $\mathrm{d}x^\mu$ 的 1-形式，又含有 $\mathrm{d}g_{ij}$ 的 1-形式。

为此，我们可以选用(2.6.6)式的右不变的 1-形式 $g^{-1}\mathrm{d}g$，从而把属于 $T^*(M)$ 的(9.3.23)式推广为属于 $T^*(P)$ 的如下的 1-形式：

$$\begin{aligned} w &= g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g \\ &= A_\mu^a(x)\left(g^{-1}\frac{\lambda_a}{2!}g\right)\mathrm{d}x^\mu + g^{-1}\mathrm{d}g \end{aligned} \tag{9.3.24}$$

其中 $g^{-1}Ag = A_\mu^a(x)\left(g^{-1}\frac{\lambda_a}{2!}g\right)\mathrm{d}x^\mu$ 与(9.3.23)式对应，而多出来的 $g^{-1}\mathrm{d}g$ 项则是左不变的 Maurer-Cartan 形式，它与 $T^*(M)$ 线性无关，从而是 w 中与 $T^*(M)$"正交"的部分。

利用 $\langle \mathrm{d}x^a, \frac{\partial}{\partial x^b}\rangle = \delta_b^a$，又可证明余切空间有如下一些性质：

(1)利用§3.1 中的规则：$\langle \mathrm{d}x^a, \frac{\partial}{\partial x^b}\rangle_- = \delta_b^a$，可以证明

$$\langle w, \mathrm{D}_\mu\rangle_- = 0 \tag{9.3.25}$$

证明 根据(9.3.24)和(9.3.11)式，

$$\begin{aligned} \langle w_{ij}, \mathrm{D}_\mu\rangle_- &= \langle g_{im}^{-1}A_\nu^a(x)\frac{(\lambda_a)_{mn}}{2!}\mathrm{d}x^\nu g_{nj} \\ &\qquad + g_{im}^{-1}\mathrm{d}g_{mj}, \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a\frac{(\lambda_a)_{pq}}{2!}g_{qr}\frac{\partial}{\partial g_{pr}}\rangle_- \\ &= g_{im}^{-1}A_\mu^a(x)\frac{(\lambda_a)_{mn}}{2!}g_{nj} - g_{im}^{-1}A_\mu^a\frac{(\lambda_a)_{pq}}{2!}g_{qr}\delta_m^p\delta_j^r \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)取(9.3.10)式的 $\bar{\mathrm{L}}_a$，可以证明

$$\langle w_{ij}, \bar{\mathrm{L}}_a\rangle_- = \left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{ij} \tag{9.3.26}$$

证明 也是根据(9.3.24)式和(9.3.10)式，

$$\langle w_{ij}, \bar{\mathrm{L}}_a\rangle_- = \langle g_{im}^{-1}A_\nu^a(x)\frac{(\lambda_a)_{mn}}{2!}\mathrm{d}x^\nu g_{nj}$$

$$+g_{im}^{-1}\mathrm{d}g_{mj}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{ik}g_{kq}\frac{\partial}{\partial g_{iq}}\rangle_-$$

$$=g_{im}^{-1}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{ik}g_{kq}\delta_m^i\delta_j^q$$

$$=g_{im}^{-1}\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{mk}g_{kj}=\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{ij}$$

对照(9.3.12)式立刻看到：w_{ij} 与切空间 $T(P)$ 的水平部分 $H(P)$ 的基矢 D_μ 对易后得零；w_{ij} 与切空间 $T(P)$ 的垂直部分 $V(P)$ 的基矢 $\frac{\partial}{\partial g_{ij}}$ 对易后得到常数矩阵 $\left(\frac{\lambda_a}{2!}\right)_{ij}$。

4. 主丛联络与规范变换

考察两个邻域 U 和 U' 的重叠区 $U\cap U'$，设 U 和 U' 的局域纤维坐标 g 和 g' 之间有如下变换 Φ：

$$g'=\Phi g,\qquad g'^{-1}=g^{-1}\Phi^{-1}\qquad(\Phi=\Phi_{UU'})\tag{9.3.27}$$

若要求联络 1-形式 w 在重叠区 $U\cap U'$ 的两种坐标系中的定义自洽，则必须要求(9.3.23)式的 A 在重叠区有如下变换：

$$A'=\Phi A\Phi^{-1}+\Phi\mathrm{d}\Phi^{-1}\tag{9.3.28}$$

证明
$$\begin{aligned}w&=g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g\\&=g'^{-1}\Phi A\Phi^{-1}g'+g'^{-1}\Phi\mathrm{d}(\Phi^{-1}g')\\&=g'^{-1}\Phi A\Phi^{-1}g'+g'^{-1}(\Phi\mathrm{d}\Phi^{-1})g'+g'^{-1}\mathrm{d}g'\\&=g'^{-1}(\Phi A\Phi^{-1}+\Phi\mathrm{d}\Phi^{-1})g'+g'^{-1}\mathrm{d}g'\end{aligned}$$

$$w'=g'^{-1}A'g'+g'^{-1}\mathrm{d}g'$$

对比 w 与 w'，若在重叠区 $U\cap U'$ 中 $w=w'$，则(9.3.28)式必定成立。

定义 9.3.2 如果在重叠区 $U\cap U'$ 中，主丛的底流形 M 上的 1-形式 $A=A_\mu^a(x)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu$ 有式(9.3.28)形式的变换，则 $A_\mu^a(x)$ 就称为**规**

范场。

5. 主丛联络与曲率 2-形式

依照(3.3.6)式和(3.3.2)式的定义，流形上的曲率 2-形式是

$$\Omega_b^a=\mathrm{d}w_b^a+w_c^a\wedge w_b^c$$

其中 $w_b^a=\theta^d\Gamma_{db}^a$ 为联络 1-形式。

现在取(9.3.24)式中的主丛联络 1-形式：

$$w=g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g$$

可类似于(3.3.6)式写出主丛的曲率如下(注意 A 是 1-形式)：

$$\begin{aligned}\Omega&=\mathrm{d}w+w\wedge w\\&=\mathrm{d}(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)+(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\\&\quad\wedge(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\\&=-g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}\wedge Ag+g^{-1}\mathrm{d}Ag-g^{-1}A\wedge\mathrm{d}g\\&\quad-g^{-1}(\mathrm{d}g)g^{-1}\wedge\mathrm{d}g+g^{-1}Ag\wedge g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g\\&\quad\wedge g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag\wedge g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}Ag\end{aligned}$$

第 1 项与第 8 项抵消，第 3 项与第 7 项抵消，第 4 项与第 6 项抵消，得

$$\Omega=g^{-1}(\mathrm{d}A+A\wedge A)g=g^{-1}Fg\tag{9.3.29}$$

其中　　$F=(\mathrm{d}A+A\wedge A)$是底流形 M 上的曲率 2-形式。

利用(9.3.23)式，又可把 F 写成如下的 2-形式：

$$\begin{aligned}F&=\mathrm{d}\left(A_\mu^a(x)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu\right)+\left(A_\mu^a(x)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu\right)\wedge\left(A_\nu^b(x)\frac{\lambda_b}{2!}\mathrm{d}x^\nu\right)\\&=\frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x^\nu}\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\mu+A_\mu^a(x)A_\nu^b(x)\left(\frac{\lambda_a}{2!}\cdot\frac{\lambda_b}{2!}\right)\mathrm{d}x^\mu\\&\quad\wedge\mathrm{d}x^\nu\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\nu^a(x)}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x^\nu}\right)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}A_\mu^a(x)A_\nu^b(x)\left[\frac{\lambda_a}{2!},\frac{\lambda_b}{2!}\right]_- \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\nu^a(x)}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x^\nu}+f_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)\right)\frac{\lambda_a}{2!}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \quad (9.3.30)$$

在这个曲率 2-形式中，只有 $\mathrm{d}x^\mu$（等价于水平分量），没有 $\mathrm{d}g_{ij}$（等价于垂直分量）。

从 $F=(\mathrm{d}A+A\wedge A)$ 出发，还可以得

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}A\wedge A-A\wedge \mathrm{d}A$$

$$A\wedge F=A\wedge \mathrm{d}A+A\wedge A\wedge A$$

$$F\wedge A=\mathrm{d}A\wedge A+A\wedge A\wedge A$$

所以

$$\mathrm{d}F+A\wedge F-F\wedge A=0 \quad (9.3.31)$$

此处 F 是曲率 2-形式，A 是联络 1-形式，所以（9.3.31）式与（3.3.13）式的曲率可积条件一致。

§9.4 伴向量丛上的联络

取物质场 $\psi(x)$，它相当于时空流形 M 上的伴向量丛 $E(M,F,G,\Pi,P)$ 上面的一个截面（见§8.3）。

物质场 $\psi(x)$ 是时空坐标 x 的函数，但它与 G 群的关系是整体的。（8.3.14）式已经表明，$E=(P\times F)/G$ 中不同的点是按等价类区分的，并不取决于 G 中的某个群元。

物质场 $\psi(x)$ 取值于 G 群表示的向量空间 F 中的向量，若 F 是 k 维空间，$\psi(x)$ 就有 k 个分量。

主丛 P 与伴向量丛 E 的底流形都是 M，M 上的曲线 $x(\tau)$ 在主丛上的水平提升为 $c(\tau)$：

$$c(\tau)=(x(\tau),g(\tau)) \quad g\in G \quad (\text{见(9.1.6)式})$$

M 上的曲线 $x(\tau)$ 在伴丛 E 的直积流形 $P\times F$ 上的水平提升为 $z(\tau)$：

$$z(\tau)=(x(\tau),g(\tau),\psi(\tau)) \quad g\in G,\psi\in F \tag{9.4.1}$$

对照(8.3.13)式，并把 $g(\tau)$ 在 F 中的表示矩阵写成 $\bar{g}(\tau)$：

$$G: \qquad P\times F \to P\times F$$

$$g^{-1}(\tau):(g(\tau),\psi(\tau))\to(g(\tau)g^{-1}(\tau),\bar{g}(\tau)\psi(\tau))$$

$$=(I,\bar{g}(\tau)\psi(\tau))$$

于是(9.4.1)的 $z(\tau)$ 可以用等价类来代表(I 是 G 中的恒等元)：

$$(x(\tau),g(\tau),\psi(\tau))\xrightarrow{\text{等价类}}(x(\tau),I,\bar{g}(\tau)\psi(\tau)) \tag{9.4.2}$$

由(9.4.2)式得知，$x(\tau)$ 在伴丛 $E\cong(P\times F)/G$ 上的水平提升只需用 $x(\tau)$ 和 $\bar{g}(\tau)\psi(\tau)$ 来表示就足够了。所以，(9.4.1)式可简化为

$$z(\tau)=(x(\tau),\bar{g}(\tau)\psi(\tau)) \tag{9.4.3}$$

为了照顾到 $(P\times F)/G$ 的群表示矩阵中不出现 G 的群元 $\bar{g}(\tau)$，仍然保留 τ，可定义

$$\psi(x(\tau))=\bar{g}(\tau)\psi(\tau) \tag{9.4.4}$$

(9.4.3)式就可写成与 $\bar{g}(\tau)$ 无关的形式如下：

$$z(\tau)=(x(\tau),\psi(x(\tau))) \tag{9.4.5}$$

这个 $z(\tau)$ 就是 $x(\tau)$ 在伴丛 $E=(P\times F)/G$ 上的水平提升。

为了确定 ψ 与 τ 的关系，我们考察 ψ 随 τ 的变化。令 $\tau=0$ 时，$\psi(\tau)|_{\tau=0}=\psi(x(\tau))|_{\tau=0}$，则代入(9.4.4)式得

$$\bar{g}(0)=1, \quad \bar{g}^{-1}(0)=1 \tag{9.4.6}$$

利用(9.4.4)式又可导出 $\psi(\tau)$ 随 τ 的变化：

$$\begin{aligned} D_\tau\psi(\tau)|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau}(\bar{g}^{-1}(\tau)\psi(x(\tau)))|_{\tau=0} \\ &= g^{-1}(\tau)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x(\tau))|_{\tau=0} \\ &\quad +(\frac{d}{d\tau}\bar{g}^{-1}(\tau))\psi(x(\tau))|_{\tau=0} \end{aligned} \tag{9.4.7}$$

根据

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\bar{g}(\tau)\bar{g}^{-1}(\tau))=0$$

$$\rightarrow\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}(\tau)\right)\bar{g}^{-1}(\tau)+\bar{g}(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}^{-1}(\tau)\right)=0$$

得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}^{-1}(\tau)\right)=-\bar{g}^{-1}(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}(\tau)\right)\bar{g}^{-1}(\tau) \tag{9.4.8}$$

再利用(9.3.1)式把 g_{ik} 写成 $\bar{g}$，把 $A_\mu^a\dfrac{(\lambda_a)_{ij}}{2!}$ 写成 $\bar{A}_\mu$，则(9.3.1)式写成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}+\bar{A}_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}(\tau)=0 \qquad (x=x(\tau))$$

代入(9.4.8)式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}^{-1}(\tau)\right)=-\bar{g}^{-1}(\tau)\left(-\bar{A}_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\bar{g}(\tau)\right)\bar{g}^{-1}(\tau)$$

$$(x=x(\tau))$$

$$=\bar{g}^{-1}(\tau)\bar{A}_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{9.4.9}$$

所以，代入(9.4.7)式有

$$\mathrm{D}_\tau\psi(\tau)|_{\tau=0}=\bar{g}^{-1}(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x(\tau))$$

$$+\bar{A}_\mu(x)\psi(x(\tau))\Big)|_{\tau=0}$$

由于(9.4.6)式 $\bar{g}^{-1}(\tau=0)=1$，所以

$$\mathrm{D}_\tau\psi(\tau)|_{\tau=0}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\bar{A}_\mu(x)\right)\psi(x)$$

$$=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{D}_\mu\psi(x) \tag{9.4.10}$$

其中 $x=x(\tau)|_{\tau=0}$，于是

$$\mathrm{D}_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\bar{A}_\mu(x) \qquad (x=x(\tau=0)) \tag{9.4.11}$$

D_μ 就是作用在伴向量丛 E 的截面 $\psi(x)$ 上的协变微分算子。

按照前面所说，$\overline{A}_\mu$ 就是 $A_\mu^a \frac{\lambda_{aij}}{2!}$，把

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\overline{A}_\mu(x)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+A_\mu^a\frac{\lambda_{aij}}{2!}\right) \tag{9.4.12}$$

与物理的规范场中的协变微分算子

$$(\partial_\mu-\mathrm{i}gA_\mu^aT_{ij}^a) \tag{9.4.13}$$

对比，显然 λ_{aij} 与 T_{ij}^a 对应，(9.4.12)式的形式与(9.4.13)式完全相同。所以，伴向量丛上的联络就是 $\overline{A}_\mu(x)=A_\mu^a(x)\frac{\lambda_{aij}}{2!}$。

第 10 章 纤维丛的示性类与曲率张量

§10.1 不变多项式与示性类

定义 10.1.1 设 α 为一个 $k\times k$ 复矩阵，$P(\alpha)$ 是 α 的矩阵元组成的多项式。若对于任何一个 $g\in GL(k,c)$（$GL(k,c)$ 代表一个 k 行 k 列非奇异（有逆矩阵）复的一般线性群），都存在如下不变性：

$$P(\alpha)=P(g^{-1}\alpha g) \tag{10.1.1}$$

则称 $P(\alpha)$ 为**不变多项式**或**示性多项式**。

设 $P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 是一个 r 次的齐次不变多项式，利用不变多项式 $P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 在微小变换 $g\cong 1+\eta g'$ 和 $g^{-1}\cong 1-\eta g'$ 下的不变性，在 η 一次微小近似下应该有

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r} P(\alpha_1,\cdots,g'\alpha_i-\alpha_i g',\cdots,\alpha_r)=0 \tag{10.1.2}$$

可在(10.1.2)式中取 g' 为李群的某一个生成元 $g'=\lambda_a$；又在(10.1.2)式的左方乘上 $A_\mu^a\mathrm{d}x^\mu$，并把它右移到 $g'=\lambda_a$ 的位置。设每一个 α_i 是一个 d_i 次的微分形式，则得：

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant r} A_\mu^a\mathrm{d}x^\mu P(\alpha_1,\cdots,g'\alpha_i-\alpha_i g',\cdots,\alpha_r)\\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}}\\ &\quad\cdot P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},A_\mu^a\lambda_a\mathrm{d}x^\mu\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_i}\\
&\cdot P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i\wedge A_\mu^a\lambda_a\mathrm{d}x^\mu\wedge\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)
\end{aligned}\tag{10.1.3}
$$

把 1-形式 $A_\mu^a\lambda_a\mathrm{d}x^\mu$ 简写成 θ，代入(10.1.3)式，又得

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}}P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}\wedge\theta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\\
&-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_i}\\
&\cdot P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i\wedge\theta\wedge\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)
\end{aligned}\tag{10.1.4}
$$

由此得知，若 θ 为 1-形式，$P(\alpha)=P(g^{-1}\alpha g)$ 为不变多项式，则(10.1.4)式等于零总是成立的。

下面，我们再对 $P(\alpha)=P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 作微分，得

$$
\mathrm{d}P(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(\alpha_1,\cdots,\mathrm{d}\alpha_i,\cdots,\alpha_r)\tag{10.1.5}
$$

利用(10.1.4)式，把其中的 θ 取作联络 1-形式 ω：

$$
\omega_j^i=A_\mu^a\frac{(\lambda_a)_j^i}{2!}\mathrm{d}x^\mu
$$

则有

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}}P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\omega\wedge\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\\
&-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_i}P(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i\wedge\omega,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)
\end{aligned}\tag{10.1.6}
$$

再与(10.1.5)式相加，就得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}P(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=&\sum_{1\leqslant i\leqslant r}^{d_1+\cdots+d_{i-1}}\{P(\alpha_1,\cdots,\mathrm{d}\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\\
&+P(\alpha_1,\cdots,\omega\wedge\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\\
&-P(\alpha_1,\cdots,\alpha_i\wedge\omega,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_r)\}\\
=&\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(\alpha_1,\cdots,\mathrm{D}\alpha_i,\cdots,\alpha_r)
\end{aligned}\tag{10.1.7}
$$

把(10.1.7)式中的α_i全都取作曲率2-形式$\alpha_i=\Omega$,则(10.1.7)式给出

$$\mathrm{d}P(\Omega,\cdots,\Omega)=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+d_2+\cdots-d_{i-1}}\cdot P(\Omega,\cdots,\mathrm{d}\Omega+\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega,\cdots,\Omega) \tag{10.1.8}$$

再根据Bianchi恒等式(见(3.3.13)式和(9.3.31)式)

$$\mathrm{d}\Omega+\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega=0 \tag{10.1.9}$$

得知$P(\Omega,\cdots,\Omega)$必定是一个闭形式

$$\mathrm{d}P(\Omega,\cdots,\Omega)=0 \tag{10.1.10}$$

这是$P(\Omega,\cdots,\Omega)$的**第一个特殊性质**。

又设ω和ω'是丛上的两组不同的联络,相应的曲率为Ω和Ω',现在取ω和ω'之间的一个内插的ω_t(ω,ω'都是1-形式):

$$\omega_t=\omega+t\eta \qquad \eta=\omega'-\omega \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{10.1.11}$$

并且定义协变外微分算子D如下。

定义 10.1.2 设V^a_b是一个p次微分形式,a,b分别是上指标和下指标,则协变外微分算子D对V^a_b的作用是:

$$\mathrm{D}V^a_b=\mathrm{d}V^a_b+\omega^a_c\wedge V^c_b-(-1)^p V^a_c\wedge\omega^c_b \tag{10.1.12$_1$}$$

例如,取$V^a_b=\Omega^a_b$,曲率2-形式Ω^a_b的次数为$p=2$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\Omega^a_b&=\mathrm{d}\Omega^a_b+\omega^a_c\wedge\Omega^c_b-(-1)^2\Omega^a_c\wedge\omega^c_b\\&=\mathrm{d}\Omega^a_b+\omega^a_c\wedge\Omega^c_b-\Omega^a_c\wedge\omega^c_b=0\end{aligned} \tag{10.1.12$_2$}$$

与(3.3.13)式和(9.3.31)式的Bianchi恒等式一致[①]

① $\omega\wedge\omega$是$\omega^a_c\wedge\omega^c_b$的简写,$\eta\wedge\eta$是$\eta^a_c\wedge\eta^c_b$的简写,简写的$\omega\wedge\omega$和$\eta\wedge\eta$都不等于零,可对照(3.1.8)式的$\Gamma^b_a$的定义。

现在采用内插的 ω_t，可以定义内插的曲率 Ω_t：

$$\begin{aligned}\Omega_t &= \mathrm{d}\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t \\ &= (\mathrm{d}\omega + t\mathrm{d}\eta) + (\omega + t\eta) \wedge (\omega + t\eta) \\ &= \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega + t(\mathrm{d}\eta + \eta \wedge \omega + \omega \wedge \eta) \\ &\quad + t^2 \eta \wedge \eta \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

其中

$$\Omega = \Omega_{t=0} = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega \tag{10.1.14}$$

又根据(10.1.11)式，对应于 η 的次数为 $p=1$，所以

$$\mathrm{D}\eta = \mathrm{d}\eta + \omega \wedge \eta + \eta \wedge \omega \tag{10.1.15}$$

于是(10.1.13)式又写成

$$\Omega_t = \Omega + t\mathrm{D}\eta + t^2 \eta \wedge \eta \tag{10.1.16}$$

η 是 1-形式，Ω 和 $\mathrm{D}\eta$ 都是 2-形式，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P\underbrace{(\Omega_t \cdots \Omega_t)}_{r} &= P(\mathrm{D}\eta, \underbrace{\Omega_t \cdots \Omega_t}_{r-1}) + P(\Omega_t, \mathrm{D}\eta, \cdots, \Omega_t) + \cdots \\ &\quad + P(\underbrace{\Omega_t, \cdots, \Omega_t}_{r-1}, \mathrm{D}_\eta) + 2t[P(\eta \wedge \eta, \underbrace{\Omega_t, \cdots \Omega_t}_{r-1}) \\ &\quad + P(\Omega_t, \eta \wedge \eta, \cdots, \Omega_t) + \cdots \\ &\quad + P(\underbrace{\Omega_t, \cdots, \Omega_t}_{r-1}, \eta \wedge \eta)] \end{aligned} \tag{10.1.17}$$

又自(10.1.6)式，由于 $\mathrm{D}\Omega = 0$，故

$$\mathrm{D}\Omega_t = t\mathrm{D}^2\eta + t^2(\mathrm{D}\eta \wedge \eta - \eta \wedge \mathrm{D}\eta) \tag{10.1.18}$$

再从(10.1.15)式得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\eta &= \mathrm{D}(\mathrm{d}\eta + \omega \wedge \eta + \eta \wedge \omega) \\ &= \mathrm{dd}\eta + \mathrm{D}\omega \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{D}\eta + \mathrm{D}\eta \wedge \omega - \eta \wedge \mathrm{D}\omega \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\eta \wedge \omega - \eta \wedge \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

利用(10.1.14)式给出的 $\mathrm{d}\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\eta &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\eta \wedge \omega \\ &\quad - \eta \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \end{aligned}$$

$$=(\Omega-\omega\wedge\omega)\wedge\eta-\eta\wedge(\Omega-\omega\wedge\omega)$$

这里利用了 $\alpha_p\wedge\beta_q=(-1)^{pq}\beta_q\wedge\alpha_p$，所以

$$D^2\eta=\Omega\wedge\eta-\eta\wedge\Omega \tag{10.1.19}$$

把(10.1.19)式和(10.1.16)式代入(10.1.18)式，则有

$$\begin{aligned}D\Omega_t&=t(\Omega\wedge\eta-\eta\wedge\Omega)+t^2(D\eta\wedge\eta-\eta\wedge D\eta)\\&=t((\Omega_t+tD\eta)\wedge\eta-\eta\wedge(\Omega+tD\eta))\\&=t(\Omega_t\wedge\eta-\eta\wedge\Omega_t)\end{aligned} \tag{10.1.20}$$

再仿照(10.1.7)式，令 $\alpha_1=\eta$(1-形式)，$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_r=\Omega_t$(2-形式)，则有

$$\begin{aligned}dP(\eta,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})=&P(D\eta,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})-P(\eta,D\Omega_t,\cdots,\Omega_t)-\cdots\\&-p(\eta,\Omega_t,\cdots,D\Omega_t)\end{aligned} \tag{10.1.21}$$

又利用(10.1.4)式，并取 $\theta=\alpha_1=\eta,\alpha_2=\cdots=\alpha_r=\Omega_t$，则给出

$$\begin{aligned}0=&P(\underbrace{\eta\wedge\eta}_{\theta\wedge\alpha_1}\wedge\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})-P(\underbrace{\eta}_{\alpha_1}\wedge\underbrace{\eta\wedge\Omega_t}_{\theta\wedge\alpha_2}\cdots\Omega_t)-\cdots\\&-P(\underbrace{\eta}_{\alpha_1}\wedge\Omega_t\cdots\wedge\underbrace{\eta\wedge\Omega_t}_{\theta\wedge\alpha_r})\\&-(-)P(\underbrace{\eta\wedge\eta}_{\alpha_1\wedge\theta}\wedge\underbrace{\Omega_t}_{\alpha_2}+\cdots\underbrace{\Omega_t}_{\alpha_r})\\&+P(\underbrace{\eta}_{\alpha_1}\wedge\underbrace{\Omega_t\wedge\eta}_{\alpha_2\wedge\theta}\wedge\cdots\underbrace{\Omega_t}_{\alpha_r})+\cdots\\&+P(\underbrace{\eta}_{\alpha_1}\wedge\underbrace{\Omega_t}_{\alpha_2}\cdots\wedge\underbrace{\Omega_t\wedge\eta}_{\alpha_r\wedge\theta})\\=&2P(\eta\wedge\eta\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t)\\&+P(\eta\wedge(\Omega_t\wedge\eta-\eta\wedge\Omega_t)\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t)+\cdots\\&+P(\eta\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t\wedge(\Omega_t\wedge\eta-\eta\wedge\Omega_t))\end{aligned} \tag{10.1.22}$$

把(10.1.20)式代入(10.1.22)式得

$$2P(\eta\wedge\eta\wedge\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})+P(\eta\wedge\frac{D\Omega_t}{t},\Omega_t\cdots\Omega_t)+\cdots$$

$$+P(\eta\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t,\frac{\mathrm{D}\Omega_t}{t}=0 \tag{10.1.23}$$

对比(10.1.21)式与(10.1.23)式，得

$$\mathrm{d}P(\eta,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})=P(\mathrm{D}\eta,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})+2tP(\eta\wedge\eta,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1}) \tag{10.1.24}$$

相仿地有

$$\mathrm{d}P(\Omega_t\wedge\eta\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t)=P(\Omega_t\wedge\mathrm{D}\eta,\Omega_t\cdots\Omega_t)$$
$$+2tP(\Omega_t\wedge\eta\wedge\eta\cdots\Omega_t) \tag*{(10.1.24)$_a$}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{d}P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1}\wedge\eta)=P(\Omega_t\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t\wedge\mathrm{D}\eta)$$
$$+2tP(\Omega_t\wedge\Omega_t\cdots\Omega_t\wedge\eta\wedge\eta) \tag*{(10.1.24)$_b$}$$

定义 10.1.3　$q(\eta,\Omega_t)=P(\eta,\Omega_t,\cdots,\Omega_t)+\cdots$

$$+P(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,\eta) \tag{10.1.25}$$

于是，取(10.1.24)+(10.1.24)$_a$+…+(10.1.24)$_b$，就得

$$\mathrm{d}q(\eta,\Omega_t)=q(\mathrm{D}\eta,\Omega_t)+2tq(\eta\wedge\eta,\Omega_t) \tag{10.1.26}$$

再取(10.1.16)式对 t 微分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t=\mathrm{D}\eta+2t\eta\wedge\eta \tag{10.1.27}$$

代入 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r})$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r})=P(\mathrm{D}\eta\wedge\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})+\cdots+P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1}\wedge\mathrm{D}\eta)$$
$$+2tP(\eta\wedge\eta\wedge\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1})+\cdots$$
$$+2tP(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1}\wedge\eta\wedge\eta) \tag{10.1.28}$$

将(10.1.28)式与(10.1.25)式右方对比，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r})$又可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\underbrace{\Omega_t\wedge\cdots\wedge\Omega_t}_{r})=q(\mathrm{D}\eta,\Omega_t)+2tq(\eta\wedge\eta,\Omega_t) \tag{10.1.29}$$

再根据(10.1.26)式，就得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\underbrace{\Omega_t\wedge\cdots\wedge\Omega_t}_{r})&=q(\mathrm{D}\eta,\Omega_t)+2tq(\eta\wedge\eta,\Omega_t)\\&=\mathrm{d}q(\eta,\Omega_t)\end{aligned} \tag{10.1.30}$$

因此，令 $\Omega_{t=1}=\Omega'$，$\Omega_{t=0}=\Omega$，则自(10.1.30)式，并采用(10.1.10)式的 η，有

$$P(\underbrace{\Omega',\Omega',\cdots,\Omega'}_{r\text{个}})-P(\underbrace{\Omega,\Omega,\cdots,\Omega}_{r\text{个}})=\mathrm{d}\int_0^1 q(\omega'-\omega,\Omega_t)\mathrm{d}t \tag{10.1.31}$$

这样就证明了用不同的联络写出的示性多项式只相差一个恰当形式：

$$\mathrm{d}\int_0^1 q(\omega'-\omega,\Omega t)\mathrm{d}t \tag{10.1.32}$$

这是 $P(\Omega,\Omega,\cdots,\Omega)$的**第二个特殊性质**。

利用(10.1.10)，(10.1.32)式又得到以下两个重要结论：

(1) 自(10.1.10)式，$\mathrm{d}P(\Omega,\Omega,\cdots,\Omega)=0$，所以 $P(\Omega,\Omega,\cdots,\Omega)$是一个闭形式。

(2) 自(10.1.32)式，利用 Stokes 定理，并设 M 是紧致无边的流形，$\partial M=0$，则有

$$\begin{aligned}\int_M(P(\Omega',\Omega',\cdots,\Omega')-P(\Omega,\Omega,\cdots,\Omega))&=\int_{\partial M}\int_0^1 q(\omega'-\omega,\Omega_t)\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned} \tag{10.1.33$_1$}$$

所以 $$\int_M(P(\Omega',\Omega',\cdots,\Omega'))=\int_M(P(\Omega,\Omega,\cdots,\Omega)) \tag{10.1.33$_2$}$$

这表明紧致无边底流形 M 上的示性多项式的积分——示性数不因

联络 ω 换成别的 ω' 而改变，所以(10.1.33)$_2$ 式是拓扑不变的积分。

§ 10.2　复向量丛上的陈示性类

设底流形 M 上有一个 k 维复向量丛 E，它的结构群是一般 k 维复线性群 $GL(k,C)$，引入联络，就可写出上一节具备(10.1.1)式性质的不变多项式如下[①]：

$$C(E)=\mathrm{Det}\left(I+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega\right)=C_0+C_1(E)+C_2(E)+\cdots \tag{10.2.1}$$

其中 $C(E)$ 称为总陈类，C_0，$C_1(E)$，$C_2(E)$，…分别是

$$\left.\begin{aligned}&C_0=1\\&C_1(E)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{Tr}\Omega\\&C_2(E)=\frac{1}{8\pi^2}(\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)-\mathrm{Tr}\Omega\wedge\mathrm{Tr}\Omega)\\&\ \vdots\end{aligned}\right\} \tag{10.2.2}$$

一般，

$$C_k(E)=\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k S_k(\Omega) \tag{10.2.3}$$

$$S_k(\Omega)=\frac{1}{k!}\sum_{(i)(j)}\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}\Omega^{i_1}_{j_1}\wedge\Omega^{i_2}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_k}_{j_k} \tag{10.2.4}$$

例如

$$k=1,S_1(\Omega)=\sum_{(i)}\Omega^i_i=\mathrm{Tr}\Omega$$

---

① 注意到 $\mathrm{Det}g(I+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega)g^{-1}=\mathrm{Det}g\cdot\mathrm{Det}(I+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega)\cdot\mathrm{Det}g^{-1}=\mathrm{Det}(I+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega)$，所以(10.2.1)式是一个不变多项式。

$$k=2, S_2(\Omega)=\frac{1}{2}(\delta^{j_1j_2}_{i_1i_2}\Omega^{i_1}_{j_1}\wedge\Omega^{i_2}_{j_2}-\delta^{j_1j_2}_{i_2i_1}\Omega^{i_1}_{j_1}\wedge\Omega^{i_2}_{j_2})$$

$$=\frac{1}{2}(\Omega^{i_1}_{i_1}\wedge\Omega^{i_2}_{i_2}-\Omega^{i_1}_{i_2}\wedge\Omega^{i_2}_{i_1})$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)-\mathrm{Tr}\Omega\wedge\mathrm{Tr}\Omega) \qquad (10.2.5)$$

这里，$S_k(\Omega)$的 k 是有限的整数，因为曲率 Ω 是一个 2-形式，若 M 的维数是 n，则只有在 $2k\leqslant n$ 时才能有 $S_k(\Omega)$，所以

$$C_j=0 \qquad 当\ 2j>n=\dim M \qquad (10.2.6)$$

从(10.2.1)式和(10.2.2)式可知，任何不变多项式 $P(\alpha)$都是由陈形式 $C_0, C_1(E), C_2(E), \cdots$组成的多项式（由于(10.2.6)，$P(\alpha)$中只有有限个项），所以 $C_0, C_1(E), C_2(E), \cdots$的集合是一个示性类的环 $I(G)$（包括 $C_i(E)$和 $C_j(E)$的相加和相乘）。

陈特征标　陈特征标是群 $GL(k,C)$的不变多项式的又一类例子，它的定义是：

$$\mathrm{Ch}(E)=\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega)$$

$$=1+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{Tr}\Omega+\frac{\mathrm{i}^2}{2!\ (2\pi)^2}\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)+\cdots$$

$$=1+C_1(E)+\frac{1}{2!}(C_1\wedge C_1-2C_2)(E)+\cdots \qquad (10.2.7)$$

同一底流形 M 上的两个向量丛的直和与直乘的陈特征标有以下性质：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(E\oplus F)&=\mathrm{Ch}(E)+\mathrm{Ch}(F)\\ \mathrm{Ch}(E\otimes F)&=\mathrm{Ch}(E)\cdot\mathrm{Ch}(F)\end{aligned} \qquad (10.2.8)$$

证明

(1) $\Omega_{E\oplus F}=\begin{pmatrix}\Omega_E & 0\\ 0 & \Omega_F\end{pmatrix}$

$$\Omega_{E\oplus F}\wedge\Omega_{E\oplus F}=\begin{pmatrix}\Omega_E\wedge\Omega_E & 0\\ 0 & \Omega_F\wedge\Omega_F\end{pmatrix}$$

所以 $$\mathrm{Tr}\Omega_{E\oplus F}=\mathrm{Tr}\Omega_E+\mathrm{Tr}\Omega_F, \tag{10.2.9$_1$}$$

$$\mathrm{Tr}\Omega_{E\oplus F}\wedge\Omega_{E\oplus F}=\mathrm{Tr}\Omega_E\wedge\Omega_E+\mathrm{Tr}\Omega_F\wedge\Omega_F \tag{10.2.9$_2$}$$

仿照(10.2.7)式得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(E\oplus F)=&\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_{E\oplus F})\\ &=(k_E+k_F)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(\mathrm{Tr}\Omega_E+\mathrm{Tr}\Omega_F)\\ &\quad+\frac{\mathrm{i}^2}{2!\ (2\pi)^2}(\mathrm{Tr}\Omega_E\wedge\Omega_E+\mathrm{Tr}\Omega_F\wedge\Omega_F)\\ &\quad+\cdots\\ &=\mathrm{Ch}(E)+\mathrm{Ch}(F)\end{aligned}$$

所以(10.2.8)第一式成立。

(2) $$\Omega_{E\otimes F}=\begin{pmatrix}\Omega_E & 0\\ 0 & I_F\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}I_E & 0\\ 0 & \Omega_F\end{pmatrix} \tag{10.2.10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(E\otimes F)&=\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_{E\otimes F})\\ &=\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}[(\Omega_E\otimes I_E)+(I_F\otimes\Omega_F)])\\ &=\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(\Omega_E\otimes I_E))\cdot\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(I_F\otimes\Omega_F))\\ &=\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(\Omega_E))\cdot\mathrm{Tr}(\exp\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(\Omega_F))\\ &=\mathrm{Ch}(E)\cdot\mathrm{Ch}(F)\end{aligned}$$

所以(10.2.8)第二式成立。

复向量丛的分裂　如果复向量丛 E 可分裂为复线丛的直和，则有：

$$E=\bigoplus\sum_{j=1}^{k}L_j,\quad C(L_j)=1+x_j,\quad x_j=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j=C_1(L_j)$$

注意 对于每一个复线丛 L_j，维数 $k=1$，Ω_j 只有一行一列：

$$C_2(L_j)=C_3(L_j)=\cdots=0$$

回顾(10.2.1)式，并把它推广：

$$\begin{aligned}C(E\oplus F)&=\mathrm{Det}\left(I+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_{E\oplus F}\right)\\&=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}I_E+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_E & 0\\ 0 & I_F+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_F\end{pmatrix}\\&=\mathrm{Det}\left(I_E+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_E\right)\wedge\mathrm{Det}\left(I_F+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_F\right)\\&=C(E)\wedge C(F)\end{aligned}\tag{10.2.11}$$

相仿地得

$$\begin{aligned}C(E)&=C\left(\bigoplus\sum_{j=1}^{k}L_j\right)\\&=C(L_1)\wedge C(L_2)\wedge\cdots\wedge C(L_k)\\&=(1+x_1)\wedge(1+x_2)\wedge\cdots\wedge(1+x_k)\end{aligned}\tag{10.2.12}$$

并不是所有的复向量丛 E 都可以分裂为复线丛的直和，但在这种情况下，可以利用分裂原理。

分裂原理 在分析和证明示性类的某些恒等关系时，可直接把秩(rank)等于 k 的复向量丛表示成为线丛 $L_1,L_2,\cdots,L_k$ 的直和①。

① F Hirzebruch. Topological Methods in Algebraic Geometry. [s. n], 1966.
R Bott and L W Tu. Differential Forms in Algebraic Topology. [s. n], 1982.

例如，设 k 维复向量丛 E 可分解为复线丛 $L_1, L_2, \cdots, L_k$：

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k \tag{10.2.13}$$

则根据(10.2.11)式，总陈类是

$$C(E) = C(L_1) \wedge C(L_2) \wedge \cdots \wedge C(L_k)$$

前已给出复线丛

$$C(L_j) = 1 + x_j, \quad x_j = C_1(L_j), \quad C_2(L_j) = C_3(L_j) = 0$$

所以 $C(E) \prod_{j=1}^{k} (1 + C_1(L_j)) = \prod_{j=1}^{k} (1 + x_j)$

$$= 1 + C_1(E) + C_2(E) + \cdots + C_k(E) \tag{10.2.14}$$

$$C_1(E) = \sum_{j=1}^{k} x_j$$

$$C_2(E) = \sum_{i<j}^{k} x_i \wedge x_j, \cdots,$$

$$\vdots$$

$$C_k(E) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k \tag{10.2.15}$$

§10.3　实向量丛上的庞特里亚金示性类

实 k 维向量丛的转移矩阵及其伴主丛(即标架丛)的纤维属于一般 k 维实线性群 $GL(k,R)$。若实矢量丛的纤维空间建立了黎曼度规，则转移矩阵可约化到 $O(k)$ 群，其伴主丛就是一个 $O(k)$ 主丛(正交标架丛)。

根据前面(10.1.31)式，结构群分别为 $O(k)$ 群和 $GL(k,R)$ 群的两个实向量丛的示性多项式必定只相差一个恰当形式。所以 $GL(k,R)$ 丛和 $O(k)$ 丛的示性多项式在紧致无边底流形 M 上的积分相同(见式(10.1.33))，是拓扑不变的积分。

现在来看 $O(k)$ 丛的庞特里亚金示性类。在实向量丛上取黎曼

度规，则由于(4.2.15)式，有

$$\Omega_{ij}=-\Omega_{ji}\rightarrow g^{ik}\Omega_{ij}=\Omega_j^k=-g^{ik}\Omega_{ji}=-\Omega_j^k$$

所以 $\mathrm{Tr}\Omega=\Omega_i^i=-\Omega_i^i=-\Omega_k^j g_{ij}g^{ik}=-\Omega_k^j\delta_j^k=-\Omega_j^j=0$

所以 $\mathrm{Tr}\Omega=-\mathrm{Tr}\Omega=0$ (10.3.1)

又由于 $\Omega_j^k=-\Omega_j^k$，并注意到 Ω 是 2-形式，Ω 与 Ω 可对易，

所以 $\mathrm{Tr}\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega=\Omega_j^i\wedge\Omega_k^j\wedge\Omega_i^k$

$$=(-\Omega_j^i)\wedge(-\Omega_k^j)\wedge(-\Omega_j^k)$$

$$=-\Omega_j^i\wedge\Omega_k^j\wedge\Omega_i^k=-\Omega^{ji}\wedge\Omega_{kj}\wedge\Omega_i^k$$

$$=-\Omega_i^j\wedge\Omega_{kj}\wedge\Omega^{ik}=-\Omega_i^j\wedge\Omega_j^k\wedge\Omega_k^i$$

$$=-\Omega_i^j\wedge\Omega_k^i\wedge\Omega_j^k=-\mathrm{Tr}\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega$$

所以 $\mathrm{Tr}\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega=-\mathrm{Tr}\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega=0$ (10.3.2)

依此类推，$\mathrm{Tr}\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega$ 只有在 Ω 为偶数个时方才不等于零。把总庞特里亚金示性类定义为如下的不变多项式：

$$P(E)=\mathrm{Det}(I-\frac{1}{2\pi}\Omega)$$

$$=I+P_1(E)+P_2(E)+\cdots \tag{10.3.3}$$

则 $P(E)$ 有如下性质：

$$P(E\oplus F)=P(E)\cdot P(F) \tag{10.3.4}$$

证明

$$\mathrm{Det}(I_{E\oplus F}-\frac{1}{2\pi}\Omega_{E\oplus F})=\mathrm{Det}(I_E-\frac{1}{2\pi}\Omega_E)\cdot\mathrm{Det}(I_F-\frac{1}{2\pi}\Omega_F)$$

$$=\begin{vmatrix} I_E-\frac{1}{2\pi}\Omega_E & O \\ O & I_F-\frac{1}{2\pi}\Omega_F \end{vmatrix}$$

$$=\left|I_E-\frac{1}{2\pi}\Omega_E\right|\cdot\left|I_F-\frac{1}{2\pi}\Omega_F\right| \tag{10.3.5}$$

所以(10.3.4)式成立。

根据(10.3.3)式,展开后得

$$P_1(E)=\frac{1}{2!\ (2\pi)^2}\delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}\Omega_{i_1 j_1}\wedge\Omega_{i_2 j_2} \tag{10.3.6}$$

$$\vdots$$

$$P_k(E)=\frac{1}{(2k)!\ (2\pi)^{2k}}\delta^{i_1\cdots i_{2k}}_{j_1\cdots j_{2k}}\Omega_{i_1 j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2k} j_{2k}} \tag{10.3.7}$$

(10.3.7)式分母上的$\frac{1}{(2k)!}$是因为 $\delta^{i_1\cdots i_{2k}}_{j_1\cdots j_{2k}}$ 在给定 $i_1,\cdots,i_{2k}$后,$j_1,\cdots,j_{2k}$有 $(2k)!$ 种等价的排列组合。如果不除以$(2k)!$,则(10.3.7)式的左方应该是$(2k)!\ P_k(E)$。这里略去了在实向量丛 E 上还可以建立的其他不变多项式。

§10.4 实定向偶维向量丛上的欧拉示性类

根据实正交群 $O(k)$和 $SO(K)$的定义,取基础表示为 $k\times k$ 维,则有

$O(k)=\{A\,|\,A=k\times k$ 矩阵,$A^{\mathrm{T}}A=E\}$,

$SO(k)=\{A\,|\,A\in O(k),\quad \det A=1>0\}$。

任何一个实 k 维定向矢量丛的结构函数,常可以约化为属于 $SO(k)$群,其基础表示为 $k\times k$ 维实反对称矩阵;在奇维实反对称矩阵的情况下,给出的行列式必为零,例如

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix}=-a_{12}a_{23}a_{13}+a_{13}a_{12}a_{23}=0 \tag{10.4.1}$$

所以,如果采用 $SO(k)$群,并且要求 $\mathrm{Det}(a_{ij})\neq 0$,则必须 $SO(k)$中的 k 等于偶数。从而得知,只有 $k=2r$ 时,流形上方才能定义上述的实定向矢量丛,即实定向偶维向量丛。

小结 设(a_{ij})为实反对称矩阵:

$$
\mathrm{Det}(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} & \cdots & -a_{k1} \\ -a_{12} & 0 & -a_{32} & \cdots & -a_{k2} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & -a_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1k} & -a_{2k} & -a_{3k} & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^k\mathrm{Det}(a_{ij})
$$

$k=$奇 $\quad \mathrm{Det}(a_{ij})=-\mathrm{Det}(a_{ij})=0 \qquad (10.4.2)$

$k=$偶 $(k=2r)$

$$
\mathrm{Det}(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1k} & -a_{2k} & -a_{3k} & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{(2^r r!)^2}(\varepsilon_{i_1\cdots i_{2r}}a_{i_1i_2\cdots i_{2r-1}i_{2r}})^2
$$

$$
=(e(a))^2 \tag{10.4.3}
$$

（证明略）

取 $a_{ij}=\dfrac{\Omega^{ij}}{2\pi}$，可定义欧拉示性类如下（恰好是(10.4.3)式右端的平方根）：

$k=2r$ 维黎曼流形时，

$$
e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{2^r r!}\frac{1}{(2\pi)^r}(\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_{2r}}\Omega^{i_1i_2}\wedge\Omega^{i_3i_4}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{2r-1}i_{2r}}) \tag{10.4.4}
$$

$k=2$ 维黎曼流形($r=1$)时，

$$e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon_{12}\Omega^{12}+\varepsilon_{21}\Omega^{21})=\frac{1}{2\pi}\Omega^{12} \tag{10.4.5}$$

$k=4$ 维黎曼流形($r=2$)时，

$$e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{32\pi^2}\varepsilon_{abcd}\Omega^{ab}\wedge\Omega^{cd} \tag{10.4.6}$$

讨论 1　欧拉示性类与庞特里亚金示性类的比较($k=2r$)：从(10.3.3)式人手，注意到 $\Omega_{ij}=-\Omega_{ji}\rightarrow\Omega^{ij}=-\Omega^{ji}$，所以有

$$P(E)=\mathrm{Det}(I-\frac{1}{2\pi}\Omega)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\Omega^{12}}{2\pi} & -\frac{\Omega^{13}}{2\pi} & \cdots & -\frac{\Omega^{1k}}{2\pi} \\ \frac{\Omega^{12}}{2\pi} & 1 & -\frac{\Omega^{23}}{2\pi} & \cdots & -\frac{\Omega^{2k}}{2\pi} \\ \frac{\Omega^{13}}{2\pi} & \frac{\Omega^{23}}{2\pi} & 1 & \cdots & -\frac{\Omega^{3k}}{2\pi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\Omega^{1k}}{2\pi} & \frac{\Omega^{2k}}{2\pi} & \frac{\Omega^{3k}}{2\pi} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+P_1(E)+P_2(E)+\cdots \tag{10.4.7}$$

根据(10.4.3)式

$$P_k(E)=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\Omega^{12}}{2\pi} & -\frac{\Omega^{13}}{2\pi} & \cdots & -\frac{\Omega^{1k}}{2\pi} \\ \frac{\Omega^{12}}{2\pi} & 0 & -\frac{\Omega^{23}}{2\pi} & \cdots & -\frac{\Omega^{2k}}{2\pi} \\ \frac{\Omega^{13}}{2\pi} & \frac{\Omega^{23}}{2\pi} & 0 & \cdots & -\frac{\Omega^{3k}}{2\pi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\Omega^{1k}}{2\pi} & \frac{\Omega^{2k}}{2\pi} & \frac{\Omega^{3k}}{2\pi} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\mathrm{Det}\left(\frac{\Omega^{ij}}{2\pi}\right)=\left(e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\right)^2 \tag{10.4.8}$$

(1)把(10.4.8)式与(10.4.4)式对比，可以看到，黎曼流形为 $k=2r$ 维时，$P_1(E)$是一个 $4r$-形式。但流形只有 $k=2r$ 维，所以对于任何整数 r，$P_k(E)=\left(e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\right)^2=0$。因为必定出现重复指标：$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i=-\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i=0$。

再考察(10.4.4)式。当黎曼流形为 $k=2r$ 维时，欧拉示性类 $e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$恰好是 $k=2r$ 形式，所以 $e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\neq 0$。它是 $k=2r$ 维流形上的 $2r$-形式。

(2)庞特里亚金示性类是不变多项式，无论用黎曼联络或者用一般线性联络都是在群的变换下不变的，二者所得上同调类相等。

欧拉类则只在黎曼联络 $SO(k)$变换下不变，而在一般 $GL(k,R)$变换下并非不变。

讨论 2 欧拉示性类与陈示性类的比较。

从§5.1对复流形性质的探讨，得知复流形必定是偶维和实定向的。事实上复向量丛具有与复流形类似的这种性质，所以复向量丛也是偶维和实定向的。

自节§10.3又可看到，如果忽略 r 维复向量丛的复结构，就可以实化为 $2r=k$ 维实向量丛 E。

例 1 $\varphi_1: C^1 \to C^1 \quad (z=x_1+\mathrm{i}x_2)$

$$z \to Z'=(\alpha+\mathrm{i}\beta)z=(\alpha x_1-\beta x_2)+\mathrm{i}(\alpha x_2+\beta x_1)$$

表达为实数，则有

$$\varphi_{R2}: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{10.4.9}$$

式中$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$称为$(\alpha+\mathrm{i}\beta)$的实化，记作

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)_R=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} \tag{10.4.10}$$

例 2 $\varphi_2: C^2\to C^2$ $(z_1=x_1+\mathrm{i}x_2, z_2=x_3+\mathrm{i}x_4)$

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}z'_1\\ z'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\\ \alpha_3+\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4+\mathrm{i}\beta_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1)z_1+(\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2)z_2\\ (\alpha_3+\mathrm{i}\beta_3)z_1+(\alpha_4+\mathrm{i}\beta_4)z_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\mathrm{i}x_2\\ x_3+\mathrm{i}x_4\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}x'_1+\mathrm{i}x'_2\\ x'_3+\mathrm{i}x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1)(x_1+\mathrm{i}x_2)+(\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2)(x_3+\mathrm{i}x_4)\\ (\alpha_3+\mathrm{i}\beta_3)(x_1+\mathrm{i}x_2)+(\alpha_4+\mathrm{i}\beta_4)(x_3+\mathrm{i}x_4)\end{pmatrix}$$

表达为实数，则有

$$\varphi_{R_4}:\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\\ x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} \tag{10.4.11}$$

其中 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}$ 称为 $\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\\ \alpha_3+\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4+\mathrm{i}\beta_4\end{pmatrix}$ 的实化，记作

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\\ \alpha_3+\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4+\mathrm{i}\beta_4\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix} \tag{10.4.12}$$

利用(10.4.10)式和(10.4.12)式的实化办法，也可把复向量丛 E 经过实化而写成实向量丛 E_R，对比(10.4.12)式与(10.4.8)式，由于 $\Omega^{ab}=-\Omega^{ba}$ 反对称，$\Omega^{aa}=\Omega^{bb}=\cdots=0$，所以实化后的 E_R 的不变多

项式仍应写成(10.4.8)式的形式：

$$P_k(E_R)=\left[e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\right]^2 \tag{10.4.13}$$

或

$$e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)=[P_k(E_R)]^{1/2}=C_k(E) \tag{10.4.14}$$

$C_k(E)=x_1\wedge\cdots\wedge x_k$ 就是实化向量从 E_R 的最高陈示性类，见(10.2.15)式。

由此得知，复矢量从 E 实化后所得到的实化向量从 E_R 上的欧拉类 $e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$ 等于实化向量从 E_R 上的最高陈示性类 $C_k(E)$。

§ 10.5 实向量从上的斯蒂菲尔-惠特尼示性类

与前面的三种示性类不同，斯蒂菲尔-惠特尼示性类不是用曲率 Ω^v 的多项式来表达的。设 M 是底流形，ξ 是 M 上的 n 维实矢量从，则可以定义总斯蒂菲尔-惠特尼示性类为：

$$w(\xi)=1+w_1(\xi)+w_2(\xi)+\cdots+w_n(\xi) \tag{10.5.1}$$

其中

$$\begin{aligned} &w_i(\xi)\in H^i(M,Z_2) \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ &w_i(\xi)=0 \quad (i>\dim M=n) \end{aligned} \tag{10.5.2}$$

式(10.5.2)中第一式中的 Z_2 代表 Z_2 群，事实上 z_2 群等于 $O(1)$ 群：因为 $O(k)$ 群所描绘的是一个 k 维球面：

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=1 \tag{10.5.3}$$

$O(1)$ 群描绘的是一个 1 维“球面”：

$$a_1^2=1\rightarrow a_1=\pm 1 \tag{10.5.4}$$

由此得知，斯蒂菲尔-惠特尼示性类的结构群就是

$$Z_2\text{ 群}=O(1)\text{群} \tag{10.5.5}$$

关于斯蒂菲尔-惠特尼示性类的应用可举两个有趣的例子。

（证明略）

例 1　M 为定向流形的充分必要条件为

$$w_1(T(M))=0 \tag{10.5.6}$$

其中 $T(M)$ 是 M 上的切丛。

例 2　M 为自旋流形（流形 M 上可以存在旋量场）的充分必要条件为前两个斯蒂菲尔-惠特尼示性类为零，即

$$w_2(T(M))=w_1(T(M))=0 \tag{10.5.7}$$

§10.6　陈-Simons 示性类

从（10.1.8）式和（10.1.9）式出发，得到了（10.1.10）式，证明了不变多项式 $P(\Omega,\cdots,\Omega)$ 必定为闭形式。

若取 w' 和 w 为两种不相同的联络，与之对应的曲率为 Ω' 和 Ω，则 $P(\Omega',\cdots,\Omega')-P(\Omega,\cdots,\Omega)$ 可以按照（10.1.31）式局域地表达为恰当形式，即：

$$P(\underbrace{\Omega',\cdots,\Omega'}_{r\text{个}})-P(\underbrace{\Omega,\cdots,\Omega}_{r\text{个}})=\underbrace{\mathrm{d}Q(w',w)}_{\text{恰当形式}} \tag{10.6.1}$$

又根据（10.1.31）式与（10.6.1）式的对比，得知

$$Q(w',w)=\int_0^1 q(w'-w,\Omega_t)\,\mathrm{d}t \tag{10.6.2}$$

其中 $q(\eta,\Omega_t)$ 的定义见（10.1.25）式。

于是，根据 Stokes 公式得

$$\int_M \mathrm{d}Q(w',w)=\int_{\partial M} Q(w',w) \tag{10.6.3}$$

这个积分在底流形 M 紧致无边（$\partial M=0$）时等于零；而在 $\partial M\neq 0$ 时，积分不一定等于零。此时 $Q(w',w)$ 本身也是示性类，有其独立的意义，称为陈-Simons 示性类，或简称为陈-Simons。

Ω 是 2-形式，$P(\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r\text{个}})$ 是 $2r$-形式，所以 $P(\Omega,\cdots,\Omega)$ 是偶形式的示性类。

w 是 1-形式，$q(w'-w,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1\text{个}})$ 是 $(2r-1)$-形式，所以 $Q(w',w)$ 是奇形式的示性类。

在这里，我们注意到(10.1.11)式中 w_t 的定义：

$$w_t=w+t\eta,\quad \eta=w'-w,\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{10.6.4}$$

还注意到(10.1.13)式和(10.1.16)式 Ω_t 的定义：

$$\Omega_t=\mathrm{d}w_t+w_t\wedge w_t=\Omega+tD\eta+t^2\eta\wedge\eta \tag{10.6.5}$$

在 w_t 和 Ω_t 的定义的前提下，可以取

$$w'=A(1\text{-形式}),\quad w=0,\quad \eta=w'-w=A \tag{10.6.6}$$

则有

$$w_t=t\eta=At\quad (w=0) \tag{10.6.7}$$

$$\Omega_t=\mathrm{d}w_t+w_t\wedge w_t=t\mathrm{d}A+tA\wedge tA \tag{10.6.8}$$

于是可定义 $(2r-1)$-形式的陈-Simons 为(采用(10.6.2)式)：

$$Q(A,0)=\int_0^1 q(A,\underbrace{\Omega_t\cdots\Omega_t}_{r-1\text{个}})\mathrm{d}t=w_{2r-1}(A) \tag{10.6.9}$$

如果 $r=2$，并定义 $F=\mathrm{d}A+A\wedge A$，则

$$\begin{aligned}
w_3(A)&=\int_0^1 q(A,\underbrace{\Omega_t}_{1\text{个}})\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{Tr}(A\wedge\Omega_t+\Omega_t\wedge A)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\mathrm{Tr}(A\wedge t\mathrm{d}A+A\wedge tA\wedge tA+t\mathrm{d}A\wedge A\\
&\quad+tA\wedge tA\wedge A)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\mathrm{Tr}(2tA\wedge\mathrm{d}A+2t^2A\wedge A\wedge A)\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{Tr}\left(A\wedge\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)\\
&=\mathrm{Tr}\left(F\wedge A-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right)
\end{aligned} \tag{10.6.10}$$

说明

(1)根据定义 10.1.3(见(10.1.25)式):

$$q(A,\Omega_t)=P(A,\Omega_t)+P(A,\Omega_t)$$

P 的含义见(10.1.1)式。

(2)从式(10.2.1),(10.2.2)和(10.2.5)得知,不变多项式必须是取迹的。

(3)A 是 1-形式,$\mathrm{d}A$ 是 2-形式,所以 $A\wedge \mathrm{d}A=\mathrm{d}A\wedge A$。

(4)r 可取任何正整数,所以陈-Simons 可有无穷多种。

第3部分　指标定理和四维流形

第11章　无边界流形的指标定理

§11.1　椭圆微分算子与解析指标

设 M 是一个 n 维紧致光滑无边流形，E 和 F 是 M 上的 m 维和 q 维复向量丛，取

$$\begin{aligned}\Gamma(E)&=\{x;\xi^1(x),\cdots,\xi^m(x)\}\\ \Gamma(F)&=\{x;\eta^1(x),\cdots,\eta^q(x)\}\end{aligned}\tag{11.1.1}$$

分别代表 E 和 F 复向量丛上的截面的集合。

将截面 $\Gamma(E)$ 映射到截面 $\Gamma(F)$ 的算子 D 称为微分算子，它在 M 的每个点 x 的邻域的作用是

$$\mathrm{D}(\xi^1(x),\cdots,\xi^m(x))=(\eta^1(x),\cdots,\eta^q(x))\tag{11.1.2}$$

$$\eta^i(x)=\sum_j a^i_{j,\mu_1,\cdots,\mu_n}(x)\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}\xi^j(x)\tag{11.1.3}$$

其中 $i=1,2,\cdots,q;j=1,2,\cdots,m$，所以(11.1.3)式又可写成

$$\left.\begin{aligned}&\eta^i(x)=D^i_j\xi^j(x)\\&\mathrm{D}^i_j=(a^i_j)_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}\end{aligned}\right\}\tag{11.1.4}$$

D^i_j 是一个 $q\times m$ 矩阵。

把 D^i_j 中最高次微分($\sum\limits_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n=\max}$)的 Fourier 变换项(即微分算子的带头项)记作(利用(11.1.4)式)

$$\widetilde{\mathrm{D}}^i_j(x,k)=\sum_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n=\max}(a^i_j)_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)k_1^{\mu_1}\cdots k_n^{\mu_n}\tag{11.1.5}$$

其中 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,两端都有($\begin{smallmatrix}i\\ \cdot\\ j\end{smallmatrix}$)指标,所以都是 $q\times m$ 矩阵。

定义 11.1.1 当 $m=q$,且 $\mathrm{Det}\widetilde{D}(x,k)\neq0$,($k\in R^n-\{0\}$)则称 D 为椭圆微分算子,否则就不是。

例 1 取 $M=R^3$,考察三种微分算子:

(1)grad:取 $\Gamma(E)$为 1 维向量(即标量,$i=1$),$\Gamma(F)$为 3 维向量($j=1,2,3$),自(11.1.5)式得

$$\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}\begin{matrix}j=1\\j=2\\j=3\end{matrix}$$

$$i=1$$

$m=1,q=3,q\neq m$,所以 grad 不是椭圆算子。

(2)curl:取 $\Gamma(E)$为 3 维向量($i=1,2,3$),$\Gamma(F)$为 3 维向量($j=1,2,3$),自(11.1.5)式得

$$\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-k_3&k_2\\k_3&0&-k_1\\-k_2&k_1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}j=1\\j=2\\j=3\end{matrix}$$

$$i=1\qquad i=2\qquad i=3$$

$\mathrm{Det}\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)=0(k\neq 0)$，所以 curl 不是椭圆算子。

(3) div：取 $\Gamma(E)$ 为 3 维向量$(i=1,2,3)$，$\Gamma(F)$ 为 1 维向量$(j=1)$，自(11.1.5)式得

$$\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)=(\underset{i=1}{k_1},\quad \underset{i=2}{k_2},\quad \underset{i=3}{k_3})$$

$m=3, q=1, q\neq m$，所以 div 不是椭圆算子。

例 2 二维底流形上实线丛之间的二阶偏微分映射的三种标准类型：

(1)**双曲型** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+A\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+B\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+Cu+G$

(2)**抛物型** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+A\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+B\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+Cu+G$

(3)**椭圆型** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+A\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+B\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+Cu+G$

这三种标准类型的基本特点全在于二次微分项，所以可以由 $\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)$ 的 k 的二次项来表达这三种标准类型的基本特点，并与定义 11.1.1 对照：

(1) $\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)=k_1^2-k_2^2$ 当 $k_1=k_2\neq 0, \widetilde{\mathrm{D}}=0$

所以在此情况下，不是椭圆微分算子。

(2) $\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)=k_1 k_2$ 当 k_1(或 k_2)$=0, \widetilde{\mathrm{D}}=0$

所以在此情况下，不是椭圆微分算子。

(3) $\widetilde{\mathrm{D}}(x,k)=k_1^2+k_2^2$ 当 $k_1, k_2\neq 0, \widetilde{\mathrm{D}}\neq 0$

所以在此情况下，是椭圆算子。

由此可见，**椭圆型**二阶偏微分算子是椭圆算子(见定义 11.1.1 式)，后者就是由此得到它的名称的，我们还注意到(3)的椭圆算子就是 Laplace 算子。

例 3 对二维底流形上的面丛(二维矢量丛)之间的映射，可举

一个(11.1.3)式形式的例子：

$$\left.\begin{aligned}\eta^1(x_1,x_2)&=\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}-\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\\ \eta^2(x_1,x_2)&=\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1}\end{aligned}\right.\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\eta^1(x_1,x_2)\\ \eta^2(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1(x_1,x_2)\\ \xi^2(x_1,x_2)\end{pmatrix}$$

仿照(11.1.5)式得

$$\tilde{\mathrm{D}}(x,k)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}k_1 & -k_2\\ k_2 & k_1\end{pmatrix}\begin{matrix}j=1\\ j=2\end{matrix}$$
$$\quad i=1\quad i=2$$

所以 $\quad \mathrm{Det}\ \tilde{\mathrm{D}}(x,k)\Leftrightarrow k_1^2+k_2^2>0$

$$m=2,q=2,q=m$$

按照定义 11.1.1，$m=q$，$\mathrm{Det}\ \tilde{\mathrm{D}}(x,k)\Leftrightarrow k_1^2+k_2^2>0$，所以这个例子的 $\tilde{\mathrm{D}}(x,k)$ 是一个椭圆微分算子，称为 Cauchy-Riemann 算子。

例 4 四维流形(四维时空)上的实线丛之间的映射：

$$\eta(x_0,x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\xi(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

$\mathrm{Det}\ \tilde{\mathrm{D}}(x,k)=k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2$，$k\neq0$ 时，$\mathrm{Det}\ \tilde{\mathrm{D}}(x,k)$ 也可以等于零，所以 $\tilde{\mathrm{D}}(x,k)$ 不是椭圆算子，又称为 d'Alember 算子。

以下引入**算子 D 的解析指标**。

定义 11.1.2 算子的核 Ker D 就是算子 D 的零模解空间，设算子 D 所作用的整个空间是 $\Gamma(E)$，则

$$\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}=\{\xi\in\Gamma(E)\mid \mathrm{D}\xi=0\}\tag{11.1.6}$$

定义 11.1.3 算子 D 的象 Imag D 定义为

$$\text{Imag D}=\{\eta\in\Gamma(F)\mid\exists\xi\in\Gamma(E),\eta=\text{D}\xi\}\tag{11.1.7}$$

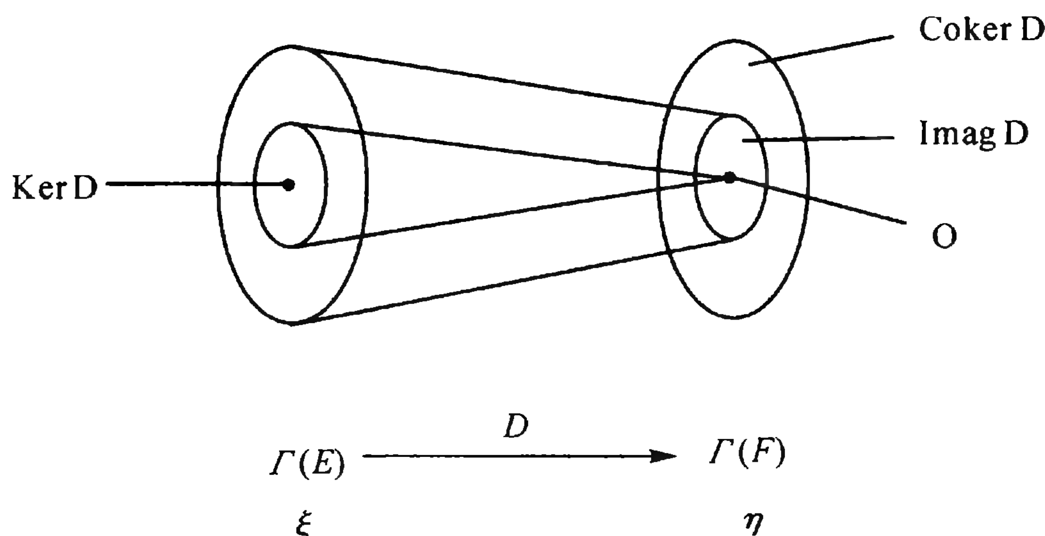


图 11.1.1

定义 11.1.2 和定义 11.1.3 都可以用图 11.1.1 来说明。图中除了 Imag D 是 $\Gamma(E)$中的一个子空间外，还有子空间 Coker D，它是 $\Gamma(F)$中除去 Imag D 后余下的部分。

当 D 是定义 11.1.1 所给出的紧致流形上的椭圆算子时，**可以证明** KerD **和** CokerD **都是有限维的，称为** Fredholm **算子**（证明略）。

对于 Fredholm 算子，KerD 为有限维是指齐次方程 $\text{D}\xi=0$ 的解空间为有限维（即存在有限个线性独立的解）；Coker 为有限维则是 η 满足有限个条件时，非齐次方程 $\text{D}\xi=\eta$ 可以有确定的解。

定义 11.1.4 算子 D 的解析指标的定义是

$$\text{Index D}=\text{dimKer D}-\text{dimCoker D}\tag{11.1.8}$$

这里 dim 代表维数。

从图 11.1.1 看到

$$\dim\Gamma(E)=\dim\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}+\dim\mathrm{Imag}\ \mathrm{D} \tag{11.1.9}$$

从图 11.1 还看到

$$\dim\Gamma(F)=\dim\mathrm{Coker}\ \mathrm{D}+\dim\mathrm{Imag}\ \mathrm{D} \tag{11.1.10}$$

于是(11.1.8)式又可写成

$$\mathrm{Index}\ \mathrm{D}=\dim\Gamma(E)-\dim\Gamma(F) \tag{11.1.11}$$

这是一个重要的关系式,因为左方的 Index D 是算子 D 的解析指标,看起来似乎应取决于算子 D 的选择。但是,右方却与算子 D 的选择无关,显示了 Index D 是一个拓扑不变量!与度规的选择也是无关的。

与图 11.1.1 相对应,还可以定义 D 的对偶算子 D^+,见图 11.1.2。

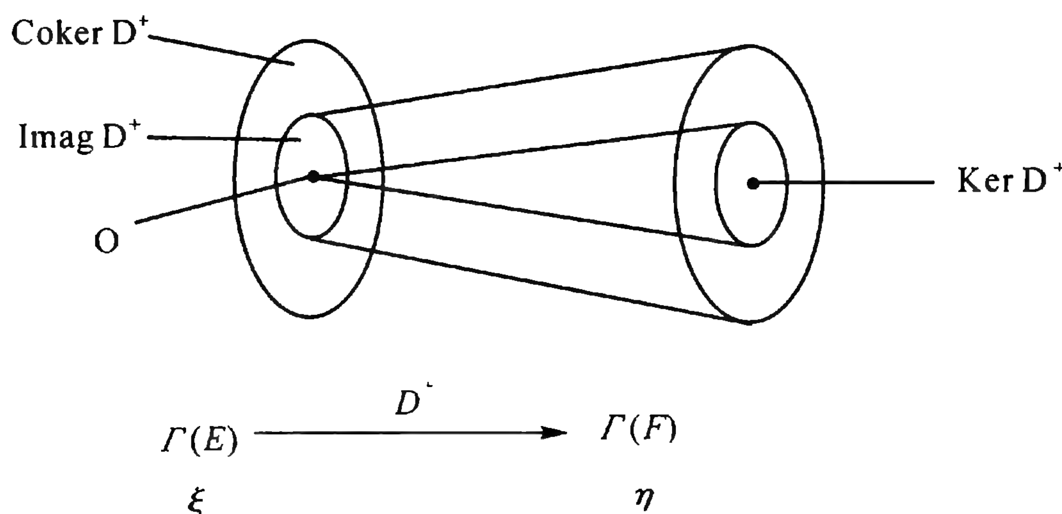


图 11.1.2

当纤维空间中定义了度规时,就可以定义 $\mathrm{D}\xi$ 与 η 的内积 $(\mathrm{D}\xi,\eta)$。

定义 11.1.5　D 的对偶算子 D^+ 有如下性质:

$$(\mathrm{D}\xi,\eta)=(\xi,\mathrm{D}^+\eta) \tag{11.1.12}$$

其中

$$\mathrm{D}^+:\Gamma(F)=\Gamma(E)$$

$$\mathrm{D}^{+}\eta: \to \mathrm{D}^{+}\eta \in \Gamma(E)$$

D 与 D^{+} 组成对偶椭圆算子 Δ_E 与 Δ_F。

定义 11.1.6

$$\begin{aligned} &\Delta_E = \mathrm{D}^{+}\mathrm{D}: \Gamma(E) \to \Gamma(E) \\ &\Delta_F = \mathrm{D}\,\mathrm{D}^{+}: \Gamma(F) \to \Gamma(F) \end{aligned} \tag{11.1.13}$$

在 $\Gamma(E)$，$\Gamma(F)$ 中，又可定义 $\Gamma_\lambda(E)$，$\Gamma_\lambda(F)$ 和 $\Gamma_0(E)$，$\Gamma_0(F)$ 如下。

定义 11.1.7

$$\begin{aligned} &\Gamma_\lambda(E) = \{\xi \in \Gamma(E), \Delta_E \xi = \lambda \xi\} \, (\lambda \neq 0); \\ &\Gamma_0(E) = \mathrm{Ker\ D} \\ &\Gamma_\lambda(F) = \{\eta \in \Gamma(F), \Delta_F \eta = \lambda \eta\} \, (\lambda \neq 0); \\ &\Gamma_0(F) = \mathrm{Ker\ D}^{+} \end{aligned} \tag{11.1.14}$$

以下证明算子 Δ_E 与 Δ_F 的 $\lambda(\neq 0)$ 本征截面的空间 $\Gamma_\lambda(E)$ 与 $\Gamma_\lambda(F)$ 是互相同构的，所以

$$\dim\Gamma_\lambda(E) = \dim\Gamma_\lambda(F), \quad \lambda \neq 0 \tag{11.1.15}$$

证明 根据定义 11.1.7，可以取

$$\xi_\lambda \in \Gamma_\lambda(E), \quad \lambda \neq 0$$

从而

$$\Delta_E \xi_\lambda = \mathrm{D}^{+}\mathrm{D}\xi_\lambda = \lambda \xi_\lambda \tag{11.1.16}$$

所以 $\Delta_F(\mathrm{D}\xi_\lambda) = \mathrm{D}\mathrm{D}^{+}\mathrm{D}\xi_\lambda = \mathrm{D}\Delta_E \xi_\lambda = \lambda(\mathrm{D}\xi_\lambda)$

可见

$$\mathrm{D}\xi_\lambda = \eta_\lambda \in \Gamma_\lambda(F) \tag{11.1.17}$$

利用(11.1.16)式，当 $\lambda \neq 0$ 时，$\mathrm{D}\xi_\lambda = \eta_\lambda \neq 0$，因为否则(11.1.16)

式必定给出 $\lambda=0$，与 $\lambda\neq 0$ 的前提抵触。

又设有 $\xi_\lambda\neq\xi'_\lambda$，则按照(11.1.14)式，得

$$\Delta_E(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)=\lambda(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)\neq 0 \quad \lambda\neq 0 \qquad (11.1.18)_1$$

所以 $$(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)\in\Gamma_\lambda(E) \qquad (11.1.18)_2$$

而且根据(11.1.17)式，应该有

$$\mathrm{D}(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)=(\eta_\lambda-\eta'_\lambda)\in\Gamma_\lambda(F) \qquad (11.1.19)$$

其中 $\eta_\lambda\neq\eta'_\lambda$。否则如果 $\eta_\lambda=\eta'_\lambda$，则必定有

$$\Delta_E(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)=\mathrm{D}^+\mathrm{D}(\xi_\lambda-\xi'_\lambda)=\mathrm{D}^+(\eta_\lambda-\eta'_\lambda)=0$$

与(11.1.18)式矛盾。

由此得知，$\mathrm{D}:\Gamma_\lambda(E)\to\Gamma_\lambda(F)$，必定是 $\xi_\lambda\to\eta_\lambda,\xi'_\lambda\to\eta_\lambda',\cdots,1:1$ 对应($\xi_\lambda\neq\xi'_\lambda\to\eta_\lambda\neq\eta'_\lambda$)。所以

$$\dim\Gamma_\lambda(E)=\dim\Gamma_\lambda(F) \quad \lambda\neq 0$$

于是(11.1.15)式得证。

又从图 11.1.1 和图 11.1.2 看

$$\left.\begin{aligned}\dim\mathrm{Imag}\ \mathrm{D}&=\sum_\lambda\dim\Gamma_\lambda(E)\\ \dim\mathrm{Imag}\ \mathrm{D}^+&=\sum_\lambda\dim\Gamma_\lambda(F)\end{aligned}\right\} \qquad (11.1.20)$$

把(11.1.15)式与(11.1.20)式对比，则有

$$\dim\ \mathrm{Imag}\ \mathrm{D}=\dim\ \mathrm{Imag}\ \mathrm{D}^+ \qquad (11.1.21)$$

仿照(11.1.9)式，又可得到与(11.1.9)式对应的

$$\dim\Gamma(F)=\dim\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}^++\dim\ \mathrm{Imag}\ \mathrm{D}^+ \qquad (11.1.22)$$

比较(11.1.10)式与(11.1.22)式，得

$$\dim\ \mathrm{Ker}\mathrm{D}^++\dim\ \mathrm{Imag}\mathrm{D}^+=\dim\ \mathrm{Coker}\ \mathrm{D}+\dim\ \mathrm{Imag}\mathrm{D}$$

利用(11.1.21)式，左方的 $\dim\ \mathrm{Imag}\ \mathrm{D}^+$ 与右方的 $\dim\ \mathrm{Imag}\ \mathrm{D}$ 相互抵消，于是有

$$\dim\ \mathrm{Ker}\mathrm{D}^+=\dim\ \mathrm{Coker}\ \mathrm{D} \qquad (11.1.23)$$

再把(11.1.9)式和(11.1.10)式代入(11.1.11)式，又得

$$\text{Index D} = \dim \text{KerD} - \dim \text{Coker D}$$

利用(11.1.23)式，就得

$$\text{Index D} = \dim \text{KerD} - \dim \text{KerD}^+ \qquad (11.1.24)$$

这就是当纤维丛上定义了度规时，微分算子 D 的解析指标的定义。在自对偶算子 D(=D$^+$)的情况，Index D=0。

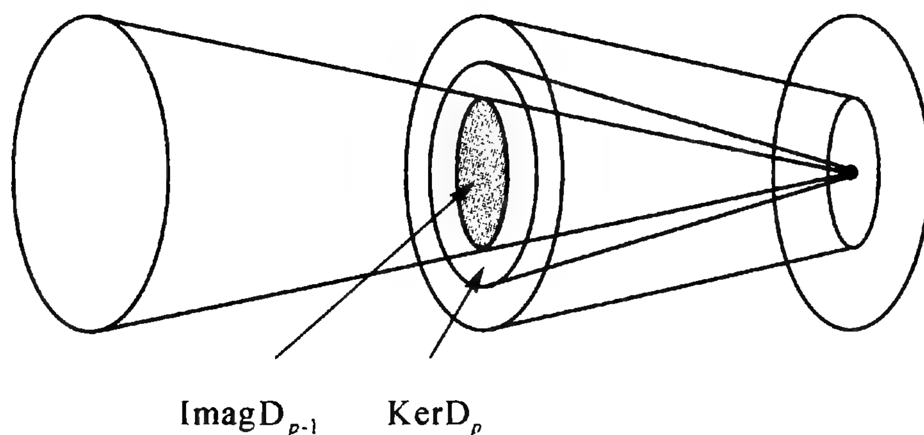
§11.2 椭圆复形与 Atiyah-Singer 指标定理

设$\{E_p\}$是 M 上矢量丛 E_p(p=1,2,…)的一个有限序列，又设

$$\mathrm{D}_p: C^\infty(E_p) \to C^\infty(E_{p+1}) \quad (p=1,2,3,\cdots) \qquad (11.2.1)$$

是与 E_p 相对应的微分算子 D_p 的一个有限序列。(11.2.1)式中的 $C^\infty(E_p)$代表**光滑的 p-形式的空间**。

定义 11.2.1 若是 $\mathrm{D}_p\mathrm{D}_{p-1}=0$(即 Ker $\mathrm{D}_p \supset$ Imag D_{p-1})，则这个序列称为**复形**(complex)(见图 11.2.1)。



$$\longrightarrow \Gamma(E_{p-1}) \xrightarrow{\mathrm{D}_{p-1}} \Gamma(E_p) \xrightarrow{\mathrm{D}_p} \Gamma(E_{p+1}) \longrightarrow$$

$$\longleftarrow \Gamma(E_{p-1}) \xleftarrow{\mathrm{D}^+_{p-1}} \Gamma(E_p) \xleftarrow{\mathrm{D}^+_p} \Gamma(E_{p+1}) \longleftarrow$$

图 11.2.1

按照定义 11.1.5，在定义了内积以后，又可以定义 D_p 的对偶算

子 D_p^+ 如下：

$$D_p^+ : C^\infty(E_{p+1}) \longrightarrow C^\infty(E_p) \quad (p=1,2,3,\cdots) \tag{11.2.2}$$

而且

$$(D_p\xi_p, \eta_{p+1}) \rightarrow (\xi_{p+1}, \eta_{p+1}) \leftarrow (\xi_{p+1}, D_{p+1}^+ \eta_{p+2}) \tag{11.2.3}$$

定义 11.2.2 伴随 D_p 序列的 Laplace 算子 Δ_p 取作

$$\Delta_p = D_p^+ D_p + D_{p-1} D_{p-1}^+ \tag{11.2.4}$$

$\Delta_p : \Gamma(E_p) \rightarrow \Gamma(E_p)$，$\Delta_p$ 也形成一个序列

定义 11.2.3 若 Δ_p 是 $C^\infty(E_p)$ 上的椭圆微分算子（见定义 11.1.1），则图 11.2.1 的序列称为椭圆复形，记作 $\{E, D\} = (\{E_p\}, \{D_p\})$。

1. 椭圆复形的上同调性质

Hodge 分解定理（见(3.4.21)式）可推广到椭圆复形。设有 $f_p \in C^\infty(E_p)$，则 f_p 可以唯一地分解如下（证明略）：

$$f_p = D_{p-1} f_{p-1} + D_p^+ f_{p+1} + h_p \tag{11.2.5}$$

h_p 称为**调和截面**，满足

$$\Delta_p h_p = 0 \tag{11.2.6}$$

可以仿照 de Rham 上同调群的定义（见(7.4.7)式）来定义椭圆复形(E,D)的上同调群：

$$H^p(E,D) = \mathrm{Ker}\ D_p / \mathrm{Imag} D_{p-1} \tag{11.2.7}$$

对比(11.2.7)式与(7.4.7)式可以看到：

(1)Ker D_p 类似 $H_{dR}^p(M,R)$中的 $Z_{dR}^p(M,R)$，即 Ker d_p；

(2)Imag D_{p-1}类似 $H_{dR}^p(M,R)$中的 $B_{dR}^p(M,R)$，即 Imagd_{p-1}。

可以证明在(11.2.7)式中的上同调类 $H^p(E,D)$都只有一个调和形式（证明从略），而且按照(11.2.6)式，若 $H^p(E,D)$是调和形式，则

必定

$$\Delta_p H^p(E,\mathrm{D})=0 \tag{11.2.8}$$

于是有同构关系

$$H^p(E,\mathrm{D})\approx \mathrm{Ker}\ \Delta_p \tag{11.2.9}$$

满足 $\mathrm{Ker}H^p(E,\mathrm{D})\approx \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ker}\ \Delta_p)=0$，与图 11.2.1 中的 $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_p)=0$ 相类似。

根据图 11.1.1 的讨论，如果 D 是紧致流形 M 上的椭圆算子，则 Ker D，Coker D 都是有限维的 Fredholm 算子。

利用(11.2.4)式，$\mathrm{Ker}\ \Delta_p$ 写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \Delta_p &=\mathrm{Ker}\ (\mathrm{D}_p^+\mathrm{D}_p+\mathrm{D}_{p-1}\mathrm{D}_{p-1}^+)\\ &=\mathrm{D}_p^+(\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_p)+(\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_{p-1})\mathrm{D}_{p-1}^+\end{aligned} \tag{11.2.10}$$

其中 $\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_p$ 和 $\mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_{p-1}$ 都是有限维的，所以 $\mathrm{Ker}\ \Delta_p$ 也是有限维的。

定义 11.2.4 椭圆复形(E,D)的指标是(根据(11.2.9)式)：

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}(E,\mathrm{D})&=\sum_p(-1)^p\dim H^p(E,\mathrm{D})\\ &=\sum_p(-1)^p\dim\ \mathrm{Ker}\ \Delta_p\end{aligned}$$

$$(\dim\ H^p(E,\mathrm{D})=\dim\ \Delta_p) \tag{11.2.11}$$

2. 复形的收拢

可以把椭圆复形收拢成为两个矢量丛 F_0 和 F_1，它们的定义是

$$F_0=\bigoplus_p E_{2p},\quad F_1=\bigoplus_p E_{2p+1}\qquad p\ \text{是正整数} \tag{11.2.12}$$

又取算子 A 及其对偶算子 A^+，定义如下：

$$A=\bigoplus_q(\mathrm{D}_{2q}+\mathrm{D}_{2q-1}^+),\quad A^+=\bigoplus_q(\mathrm{D}_{2q}^++\mathrm{D}_{2q-1})\qquad q\ \text{是整数} \tag{11.2.13}$$

则有

$$A:C^{\infty}(F_0)\Rightarrow C^{\infty}(F_1)$$
$$A^{+}:C^{\infty}(F_1)\Rightarrow C^{\infty}(F_0) \tag{11.2.14}$$

证明　根据图 11.2.1,可证明(11.2.14)式如下:

$$AF_0=\bigoplus_q(\mathrm{D}_{2q}+\mathrm{D}_{2q-1}^{+})\cdot\bigoplus_p E_{2p}=\bigoplus_p(\mathrm{D}_{2p}E_{2p}+\mathrm{D}_{2p-1}^{+}E_{2p})$$
$$=\bigoplus_p E_{2p+1}+\bigoplus_p E_{2p-1}=F_1 \tag{11.2.15}$$
$$A^{+}F_1=\bigoplus_q(\mathrm{D}_{2q}^{+}+\mathrm{D}_{2q-1})\cdot\bigoplus_p E_{2p+1}=\bigoplus_p(D_{2p}^{+}E_{2p+1}+D_{2p+1}E_{2p+1})$$
$$=\bigoplus_p E_{2p}+\bigoplus_p E_{2p+2}=F_0 \tag{11.2.16}$$

证毕。

此外,A 和 A^{+} 还有如下性质:

$$\square_0=A^{+}A=\bigoplus_p\Delta_{2p}$$
$$\square_1=AA^{+}=\bigoplus_p\Delta_{2p+1} \tag{11.2.17}$$

证明　根据(11.2.13)式和(11.2.15),(11.2.16)式,并使用(11.2.4)式中的 Δ_p 的定义:

$$\square_0=A^{+}A$$
$$=\bigoplus_p(\mathrm{D}_{2p}^{+}+\mathrm{D}_{2p-1})\cdot\bigoplus_q(\mathrm{D}_{2q}+\mathrm{D}_{2q-1}^{+})$$
$$=\bigoplus_p(\mathrm{D}_{2p}^{+}\mathrm{D}_{2p}+\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2p-1}^{+})=\bigoplus_p\Delta_{2p} \tag{11.2.18}$$

在(11.2.18)式中,$\square_0$ 还有两类乘积,一类是 $\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2q}=0$,另一类是 $\mathrm{D}_{2p}^{+}\mathrm{D}_{2q-1}^{+}=0$,其原因如下:

假设 $\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2q}E_{2q}=\mathrm{D}_{2p-1}E_{2q+1}\neq 0$,则由于只有取 $E_{2q+1}=E_{2p-1}$,方才属于 D_{2p-1} 的作用空间,从而有

$$\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2q}E_{2q}=\mathrm{D}_{2p-1}E_{2p-1}=\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2p-2}E_{2p-2}$$

然而在椭圆复形的情况下,按照定义 11.2.1,应得

$$\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2p-2}=0$$

所以在(11.2.18)中,必定是

$$\mathrm{D}_{2p-1}\mathrm{D}_{2q}=0 \tag{11.2.19}$$

又假设 $D_{2p}^{+}D_{2q-1}^{+}E_{2q}=D_{2p}^{+}E_{2q-1}\neq 0$，则由于只有取 $E_{2q-1}=E_{2p+1}$，方才属于 D_{2p}^{+} 的作用空间，所以必须将 $2q-1$ 换成 $2p+1$，$2q$ 换成 $2p+2$，从而获得有意义的结果如下：

$$D_{2p}^{+}D_{2q-1}^{+}E_{2q}\Rightarrow D_{2p}^{+}D_{2p+1}^{+}E_{2p+2} \tag{11.2.20}$$

在椭圆复形的条件下，仿照(11.2.3)式，并注意到"→"与"←"都和等价符号"⇔"有相同的含意，于是有

$$\begin{aligned}(D_{p+1}D_{p}\xi_{p},\eta_{p+2})&\Leftrightarrow(D_{p}\xi_{p},D_{p+2}^{+}\eta_{p+2})\\&\Leftrightarrow(\xi_{p},D_{p+1}^{+}D_{p+2}^{+}\eta_{p+2})\end{aligned} \tag{11.2.21}$$

可见，如果 $D_{p+1}D_{p}=0$，则自(11.2.21)式必定有

$$D_{p+1}^{+}D_{p+2}^{+}=0\rightarrow D_{2q-2}^{+}D_{2q-1}^{+}=0$$

于是自(11.2.20)式得知在(11.2.18)式中

$$D_{2p}^{+}D_{2q-1}^{+}=0 \tag{11.2.22}$$

这样就完成了(11.2.17)第一式 $\square_0=A^{+}A=\bigoplus_{p}\Delta_{2p}$ 的证明。

与(11.2.18)式相仿，可以证明

$$\begin{aligned}\square_1&=AA^{+}=\bigoplus_{p}(D_{2p}+D_{2p-1}^{+})\bigoplus_{q}(D_{2q}^{+}+D_{2q-1})\\&=\bigoplus_{p}(D_{2p}D_{2p}^{+}+D_{2p-1}^{+}D_{2p-1})=\bigoplus_{p}\Delta_{2p+1}\end{aligned} \tag{11.2.23}$$

从而又完成了(11.2.17)第二式 $\square_1=AA^{+}=\bigoplus_{p}\Delta_{2p+1}$ 的证明。

把图 11.2.1 中的(E,D)与公式(11.2.15)和(11.2.16)中的(F,A)相互对照，显示出(E,D)与(F,A)有下列相似性质：

$D:\ E_{p}\rightarrow E_{p+1}$	$A:\ F_{0}\rightarrow F_{1}$
$D^{+}:E_{p+1}\rightarrow E_{p}$	$A^{+}:\ F_{1}\rightarrow F_{0}$

回顾(11.1.24)式，由于 D 是作用在 E_p 上的，所以应该更确切地把式(11.1.24)写成

$$\text{Index}(E,D)=\dim\text{Ker}\,D-\dim\text{Ker}\,D^{+} \tag{11.2.24}$$

又根据上面的对照中显示出(E,D)和(F,A)的相似性质，所以与 F，A 相关的指标 $\text{Index}(F,A)$ 应该是

$$\text{Index}(F,A)=\dim \text{Ker}A-\dim \text{Ker } A^+ \tag{11.2.25}$$

当然,这是一个猜测。以下证明这个猜测是对的,首先证明以下两个命题:

(i) $\dim \text{Ker}A=\dim \text{Ker}\Box_0$ (11.2.26)$_1$

(ii) $\dim \text{Ker}A^+=\dim \text{Ker}\Box_1$ (11.2.26)$_2$

证明 (i)设 w 满足 $\Box_0 w=0$,则根据(11.2.18)式并按照(11.2.21)式的运算规则,得

$$0=(\Box_0 w,w)=(A^+Aw,w)=(Aw,Aw) \tag*{(11.2.27)$_1$}$$

所以按照内积的定义,得知 $Aw=0$。这就是说,如果$\Box_0 w=0$,则有 $Aw=0$,所以 $\text{Ker}\Box_0=\text{Ker}A$,(11.2.26)$_1$ 式成立。

(ii)设 w 满足$\Box_1 w=0$,则根据(11.2.23)式,并按照(11.2.21)式的运算规则,得

$$\begin{aligned}0&=(\Box_1 w,w)\\&=(AA^+w,w)=(A^+w,A^+w)\end{aligned} \tag*{(11.2.27)$_2$}$$

也是按照内积的定义,得知 $A^+w=0$,所以和前面一样,如果$\Box_1 w=0$,则有 $A^+w=0$,于是 $\text{Ker}\Box_1=\text{Ker}A^+$。(11.2.26)$_2$ 成立。再把(11.2.26)$_1$ 式和(11.2.26)$_2$ 式分别代入(11.2.25)式又得

$$\text{Index}(F,A)=\dim \text{Ker}\Box_0-\dim \text{Ker}\Box_1 \tag{11.2.28}$$

利用式(11.2.17),又得

$$\begin{aligned}\text{Index}(F,A)&=\dim \text{Ker}\bigoplus_p\Delta_{2p}-\dim \text{Ker}\bigoplus_p\Delta_{2p+1}\\&=\sum_q(-1)^q\dim \text{Ker}\Delta_q\end{aligned} \tag{11.2.29}$$

与式(11.2.11)对比,得知

$$\begin{aligned}\text{Index}(E,\text{D})&=\sum_p(-1)^p\dim \text{Ker}\Delta_p\\&=\text{Index}(F,A)\end{aligned} \tag{11.2.30}$$

根据 1963 年 Atiyah 与 Singer 发现的 A-S 指标定理(证明略去),$\text{Index}(E,\text{D})=\text{Index}(F,A)$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\cdot\int_M \frac{\mathrm{ch}F_0-\mathrm{ch}F_1}{e(T(M))}\mathrm{td}(T(M)\otimes C)$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$\cdot\int_M \frac{\mathrm{ch}\bigoplus_p E_{2p}-\mathrm{ch}\bigoplus_p E_{2p+1}}{e(T(M))}\mathrm{td}(T(M)\otimes C)$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\int_M \frac{\sum_p(-1)^p\mathrm{ch}(E_p)}{e(T(M))}\mathrm{td}(T(M))\otimes C) \tag{11.2.31}$$

对(11.2.31)式中的符号的说明：

(1) $\mathrm{ch}E$,$\mathrm{ch}F$ 是向量丛 E,F 的陈特征标(见(10.2.7)式的定义),$\mathrm{ch}F_0$,$\mathrm{ch}F_1$ 和 $\mathrm{ch}E_p$ 分别是向量丛 F_0,F_1,E_p 的陈特征标。

(2) $\mathrm{td}(T(M)\otimes C)$是底流形切丛 $T(M)\otimes C$ 的 Todd 类,矢量丛 E 的 Todd 类定义为

$$\mathrm{td}(E)=\prod_{j=1}^{k}\frac{x_j}{1-\mathrm{e}^{-x_j}}\quad\left(x_j=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}C_1(E)+\frac{1}{12}(C_1^2(E)+C_2(E))$$

$$+\frac{1}{24}C_1(E)C_2(E)+\cdots \tag{11.2.32}$$

其中 $C_1(E)$,$C_2(E)$,…,$C_k(E)$的定义见式(10.2.15)。

Todd 类还有如下性质：

$$\mathrm{td}(E\oplus F)=\mathrm{td}(E)\mathrm{td}(F) \tag{11.2.33}$$

(3) $e(T(M))$是底流形切丛 $T(M)$的 Euler 类。

(4) $\int_M$ 表示对整个底流形 M 进行积分。

$n=\dim M$ (当 M 是 n 维实流形)

$n=2q$ (当 M 是 q 维复流形)

复的 q 维向量空间的复向量变换可以表达为实的 $n=2q$ 维向量空间的实向量变换，从而复 q 维的映射可以转换为实的 $n=2q$ 维的映射。举例如下。

例 1　$\varphi_1 : C^1 \to C^1 (z = x_1 + \mathrm{i}x_2)$

复映射：

$$z \to z' = (\alpha + \mathrm{i}\beta)z = (\alpha x_1 - \beta x_2) + \mathrm{i}(\alpha x_2 + \beta x_1)$$

所以　$x_1 + \mathrm{i}x_2 \to x'_1 + \mathrm{i}x'_2 = (\alpha x_1 - \beta x_2) + \mathrm{i}(\alpha x_2 + \beta x_1)$

与此对应的实映射是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ 称为复映射$(\alpha + \mathrm{i}\beta)$的实化（realization），记作

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha + \mathrm{i}\beta)_R \tag{11.2.34}$$

例 2　$\varphi_2 : C^2 \to C^2$　$(z_1 = x_1 + \mathrm{i}x_2, z_2 = x_3 + \mathrm{i}x_4)$

复映射：

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2 \\ \alpha_3 + \mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4 + \mathrm{i}\beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_2 \\ x_3 + \mathrm{i}x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_1 + \mathrm{i}x'_2 \\ x'_3 + \mathrm{i}x'_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta)(x_1 + \mathrm{i}x_2) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2)(x_3 + \mathrm{i}x_4) \\ (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_3)(x_1 + \mathrm{i}x_2) + (\alpha_4 + \mathrm{i}\beta_4)(x_3 + \mathrm{i}x_4) \end{pmatrix}$$

与此对应的实映射是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}$ 称为复映射 $\begin{pmatrix}\alpha_1+i\beta_1 & \alpha_2+i\beta_2\\ \alpha_3+i\beta_3 & \alpha_4+i\beta_4\end{pmatrix}$ 的实化，记作

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+i\beta_1 & \alpha_2+i\beta_2\\ \alpha_3+i\beta_3 & \alpha_4+i\beta_4\end{pmatrix}_R \tag{11.2.35}$$

以上(11.2.34)和(11.2.35)式分别代表 $q=1$ 和 $q=2$ 时的实化。q 为其他正整数时，也有与式(11.2.34)和(11.2.35)相仿的关系式，表明复 q 维的映射可以实化成为实的 $n=2q$ 维的映射。

§11.3 de Rham 复形与 Gauss-Bonnet 定理

回顾一下(11.2.34)式和(11.2.35)式，从(11.2.34)，(11.2.35)式可知

$$B_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$$

$$B_2B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -i & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -i & 0 & i\end{pmatrix}$$

$$B_4^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i}\\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$B_4B_4^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{11.3.1}$$

依此类推，可给出 $2k$ 行 $2k$ 列的矩阵 B_{2k} 和 B_{2k}^{-1}：

$$B_{2k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\begin{pmatrix}\begin{matrix}1 & & & \\ -\mathrm{i} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & -\mathrm{i} & & \\ & & 1 & \\ & & -\mathrm{i} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & -\mathrm{i}\end{matrix} & \vdots & \begin{matrix}1 & & & \\ \mathrm{i} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & \mathrm{i} & & \\ & & 1 & \\ & & \mathrm{i} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & -\mathrm{i}\end{matrix}\end{pmatrix}\right\}2k\ 行,$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{k列}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{k列}$

$$B_{2k}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cccccccc}1 & \mathrm{i} & & & & & & \\ & & 1 & \mathrm{i} & & 0 & & \\ & & & & 1 & \mathrm{i} & & \\ & & 0 & & & & 1 & \mathrm{i} \\ \hdashline 1 & -\mathrm{i} & & & & & & \\ & & 1 & -\mathrm{i} & & 0 & & \\ & & & & 1 & -\mathrm{i} & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & & 1 & -\mathrm{i}\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}k\text{ 行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}k\text{ 行}\end{array} \tag{11.3.2}$$

$$B_{2k}B_{2k}^{-1}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1\end{pmatrix}}_{2k\text{列}}\left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\}2k\text{ 行} \tag{11.3.3}$$

根据式(11.2.34)和式(11.3.1)，

$$\begin{aligned}B_2^{-1}(\alpha+\mathrm{i}\beta)_R B_2 &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\alpha+\mathrm{i}\beta & 0\\ 0 & \alpha-\mathrm{i}\beta\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11.3.4}$$

根据式(11.2.35)和式(11.3.1)

$$B_4^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_2 & \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\\ \alpha_3+\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4+\mathrm{i}\beta_4\end{pmatrix}_R B_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i}\\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & -\beta_2\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2\\ \alpha_3 & -\beta_3 & \alpha_4 & -\beta_4\\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2 & 0 & 0\\ \alpha_3+\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4+\mathrm{i}\beta_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_1-\mathrm{i}\beta_1 & \alpha_2-\mathrm{i}\beta_2\\ 0 & 0 & \alpha_3-\mathrm{i}\beta_3 & \alpha_4-\mathrm{i}\beta_4\end{pmatrix} \tag{11.3.5}
$$

把式(11.3.4)和式(11.3.5)再推广到一般的 $2k\times 2k$ 行列的矩阵，则有

$$
B_{2k}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1 & \cdots & \alpha_k+\mathrm{i}\beta_k\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{k+1}+\mathrm{i}\beta_{k+1} & \cdots & \alpha_{2k}+\mathrm{i}\beta_{2k}\end{pmatrix}B_{2k}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1\cdots\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k\\ \vdots\\ \alpha_{k+1}+\mathrm{i}\beta_{k+1}\cdots\alpha_{2k}+\mathrm{i}\beta_{2k}\end{matrix} & 0\\ 0 & \begin{matrix}\alpha_1-\mathrm{i}\beta_1\cdots\alpha_k-\mathrm{i}\beta_k\\ \vdots\\ \alpha_{k+1}-\mathrm{i}\beta_{k+1}\cdots\alpha_{2k}-\mathrm{i}\beta_{2k}\end{matrix}\end{pmatrix} \tag{11.3.6}
$$

由此得到以下结论：

设 M 是定向紧致光滑 $n=2q$ 维实流形，$T(M)$是 M 上的余切丛($n=2q$ 维)。经过复化，并作 B_{2q}的变换，把 $x^1,x^2,\cdots,x^q,y^1,y^2,\cdots,y^q$ 和它们的变换矩阵改换成 $z^1,\cdots,z^q,\bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^q$ 和它们的变换矩阵，就得到 $T(M)\otimes C=E_q\oplus\bar{E}_q$，$E_q$ 和 $\bar{E}_q$ 是相互复共轭的两个复 q 维余切丛。

定义 $\Lambda^k T(M)\otimes C$ 为 $M\otimes C$ 上的光滑复值 de-Rham k-形式的集合。在相关的子序列$\{d_k\}$中，每一个 d_k 都取作

$$d_k = d = (\partial + \bar{\partial}) \tag{11.3.7}$$

根据(5.2.5)式和(5.2.6)式

$$\begin{aligned} df &= \left(dx^k \frac{\partial}{\partial x^k} + dy^k \frac{\partial}{\partial y^k}\right) f = \left(dz^k \frac{\partial}{\partial z^k} + d\bar{z}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) f \\ &= (\partial + \bar{\partial}) f \end{aligned} \tag{11.3.8}$$

于是 d_k 和 Λ^k 可以形成与图 11.2.1 类似的序列如下：

$$\cdots \xrightarrow{d_{k-1}} \Lambda^k \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots \tag{11.3.9}$$

又由于∂和$\bar{\partial}$有如下性质：

$$\partial \cdot \partial = 0, \quad \bar{\partial} \cdot \bar{\partial} = 0, \quad \partial \cdot \bar{\partial} = -\bar{\partial} \cdot \partial$$

可得

$$\begin{aligned} dd &= (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial}) \\ &= \partial \cdot \partial + \bar{\partial} \cdot \bar{\partial} + \partial \cdot \bar{\partial} + \bar{\partial} \cdot \partial = 0 \end{aligned} \tag{11.3.10}$$

满足 $d_k d_{k-1} = 0$，所以(Λ, d)是一个复形。

所以，仿照图 11.2.1，可以把(11.3.9)的序列表达为图 11.3.1。

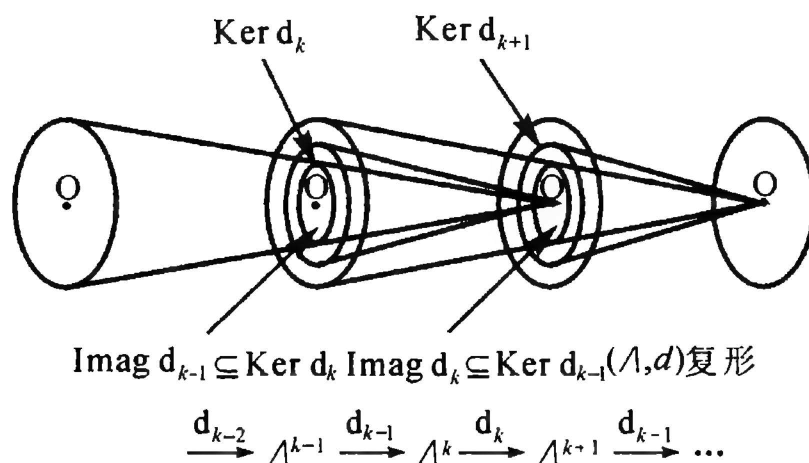


图 11.3.1

定义 11.3.1 如果在(11.3.9)式的 Λ^k 矢量从序列中，$d_k d_{k-1} = 0$(k 是整数)，即 $\text{Imag}d_{k-1} \subseteq \text{Ker}d_k$，则图 11.3.1 的复形称为椭圆复

形。$\text{Imagd}_{k-1} \subseteq \text{Kerd}_k$ 就是椭圆复形的充要条件。图 11.3.1 的复形称为(Λ,d)复形。

这个复形的算子矩阵只有一个 d(d 是一个(1,1)矩阵)。$k \neq 0$ 时,根据(11.1.5)式,$\tilde{\text{d}} \sim k \neq 0$,满足椭圆微分算子的条件,所以($\Lambda$,d)复形就是一个椭圆复形。

再把 k 为偶数与 k 为奇数的 Λ^k 分别相加如下:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{偶} &= \Lambda^0 \oplus \Lambda^2 \oplus \Lambda^4 \oplus \cdots \\ \Lambda^{奇} &= \Lambda^1 \oplus \Lambda^3 \oplus \Lambda^5 \oplus \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11.3.11}$$

$\Lambda^{偶}$ 和 $\Lambda^{奇}$ 构成 de Rham 复形。取 $\text{d}+\delta$(δ 的定义见(3.4.10)式)为 de Rham 复形的微分算子,则有(C^∞ 表示微分流形 Λ 光滑):

$$\begin{aligned} (\text{d}+\delta): C^\infty(\Lambda^{偶}) &\to C^\infty(\Lambda^{奇}) \\ (\text{d}+\delta): C^\infty(\Lambda^{奇}) &\to C^\infty(\Lambda^{偶}) \end{aligned} \tag{11.3.12}$$

根据(11.2.11)式,de Kham 复形的指标应是

$$\text{Index}(\Lambda,\text{d}) = \sum_p (-1)^p \dim_C H^p_{\text{dR}}(T(M) \otimes C) \tag{11.3.13}$$

又自(11.2.7)式,

$$\begin{aligned} \dim_C H^p_{\text{dR}}(T(M) \otimes C) &= \dim_C \frac{\text{Kerd}_p}{\text{Imag d}_{p-1}} \\ &= \dim_R H^p_{\text{dR}}(T(M), R) = b_p \end{aligned} \tag{11.3.14}$$

即复流形的维数等于去掉复流形坐标虚部所得实流形维数。

把(11.3.14)式代入(11.3.13)式,有

$$\begin{aligned} \text{Index}(\Lambda,\text{d}) &= \sum_p (-1)^p \dim_R H^q_{\text{dR}}(T(M), R) \\ &= \sum_p (-1)^p b_p = \chi(M) \end{aligned} \tag{11.3.15}$$

$b_p = \dim H^p(M,R) = \dim H_p(M,R)$ 是流形 M 的 p 阶 Betti 数。Betti 数的"交替和"称为流形 M 的欧拉示性数 $\chi(M)$。

(11.3.15)式左方的 Index(Λ,d)可以利用指标定理求出。根据

(11.2.31)式，可如下给出 Index(Λ, d)：

$$\text{Index}(\Lambda,\mathrm{d})=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\cdot\sum_{p}(-1)^{p}\cdot\int_{\substack{M\\ n=2q\text{维}}}\frac{\mathrm{ch}(\Lambda^{p}T(M)\otimes C)\cdot\mathrm{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}\tag{11.3.16}$$

为了把(11.3.16)式右方计算出来，我们参考(11.3.6)式：

$$T(M)\otimes C\cong E_q\oplus\bar{E}_q\tag{11.3.17}$$

利用(10.2.8)式，于是有

$$\mathrm{ch}(T(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(E_q)\oplus\mathrm{ch}(\bar{E}_q)\tag{11.3.18}$$

这里 E_q 和 $\bar{E}_q$ 是相互复共轭的两个复 q 维余切丛。

又利用(10.2.13)式的分裂原理，可把 E_q 和 $\bar{E}_q$ 分解为

$$E_q=\oplus\sum_{j=1}^{q}L_j,\quad \bar{E}_q=\oplus\sum_{j=1}^{q}\bar{L}_j\tag{11.3.19}$$

$\bar{E}_q$ 与 E_q 不但复共轭，而且对偶。说明如下：

在取定厄米度规时，流形上的结构群总可以取作**幺正群** $U(n)$：

$$U(n)=\{A\,|\,A^{+}A=I,A\in GL(n)\}\tag{11.3.20}$$

幺正群 $U(n)$ 的矩阵有 $A^{+}=A^{-1}$ 特点，于是有如下性质：

$$A^{-1}=A^{+}=(A^{*})^{\mathrm{T}},A^{+}A=(A^{*})^{\mathrm{T}}A=I$$

$$A^{*}=(A^{+})^{T}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\tag{11.3.21}$$

利用(11.3.21)式的特点，若对于 E_q 有转换矩阵为 c，

$$E'_q=cE_q,\tag{11.3.22}$$

则其复共轭的转换必定是(根据(11.3.21)式)

$$\bar{E}'_q=\bar{c}\bar{E}_q=(c^{+})^{\mathrm{T}}\bar{E}_q=(c^{-1})^{\mathrm{T}}\bar{E}_q=\bar{E}_q c^{-1}\tag{11.3.23}$$

利用式(11.3.22)和(11.3.23)，得

$$\bar{E}'_q\cdot E'_q=(\bar{E}'_q c^{-1)})\cdot(cE_q)=\bar{E}_q\cdot E_q\tag{11.3.24}$$

定义 11.3.1 如果矢量丛 E_q 与矢量丛 $\bar{E}_q$ 分别服从(11.3.22)

式和(11.3.23)式的变换规则，则称矢量丛 E_q 和矢量丛 $\bar{E}_q$ 相互对偶。(11.3.19)式中的 L_j 与 $\bar{L}_j$ 必定也相互对偶。

利用式(10.2.8)的陈特征标的乘法规则，有

$$\mathrm{ch}(L_j \otimes \bar{L}_j) = \mathrm{ch}(L_j) \cdot \mathrm{ch}(\bar{L}_j) \tag{11.3.25}$$

对于一维线丛 L_j 和 $\bar{L}_j$，其曲率 Ω_j 都是 1×1 实矩阵，从而可定义：

$$x_j = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j, \quad \bar{x}_j = \frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j \tag{11.3.26}$$

利用(10.2.7)的 $\mathrm{ch}(E)$ 的定义，又得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ch}(L_j) &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j} = \mathrm{e}^{x_j} \\ \mathrm{ch}(\bar{L}_j) &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_j} = \mathrm{e}^{\bar{x}_j} \end{aligned}\right\} \tag{11.3.27}$$

为方便起见，可把 $\bar{x}_1 = -x_1, \bar{x}_2 = -x_2, \cdots, \bar{x}_q = -x_q$ 写成 x_{q+1} $(=-x_1), x_{q+2}(=-x_2), \cdots, x_{2q}(=-x_q)$。于是，利用复向量丛可分解为复线丛的直和的分裂原理(见(10.2.13)式)，还可把复线丛分裂后的 $T(M)\otimes C = E_q \oplus \bar{E}_q$(见(11.3.6)式)的曲率矩阵 $\Omega_{T(M)\otimes C} = \Omega_{E_q+\bar{E}_q}$ 写成如下形式(按照(11.3.26)式)：

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_{T(M)\otimes C} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega_{E_q\oplus\bar{E}_q} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & x_q & & & \\ & & & x_{q+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & x_{2q} \end{pmatrix} \tag{11.3.28}$$

根据(11.3.27)，(11.3.35)和(10.2.8)式，又能写出陈特征标(见(10.2.7)式)如下：

$$\mathrm{ch}(L_j)=\mathrm{e}^{x_j}$$

$$\mathrm{ch}(L_j\otimes L_k)=\mathrm{ch}(L_j)\cdot\mathrm{ch}(L_k)=\mathrm{e}^{x_j}\cdot\mathrm{e}^{x_k}$$

$$\mathrm{ch}(L_j\otimes L_k\otimes L_q)=\mathrm{ch}(L_j)\cdot\mathrm{ch}(L_k)\cdot\mathrm{ch}(L_q)=\mathrm{e}^{x_j}\cdot\mathrm{e}^{x_k}\cdot\mathrm{e}^{x_q}$$

$$\vdots \tag{11.3.29}$$

可以利用(11.3.28)和(11.3.29)式求出(11.3.16)式中的积分函数：

$$\sum_{p=0}^{p=n=2q}(-1)^p\mathrm{ch}(\Lambda^pT(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(\Lambda^0T(M)\otimes C)-\mathrm{ch}(\Lambda^1T(M)\otimes C)+\mathrm{ch}(\Lambda^2T(M)\otimes C)\cdots+\mathrm{ch}(\Lambda^{2q}T(M)\otimes C) \tag{11.3.30}$$

在(11.3.30)式中，有

$p=0$： $\mathrm{ch}(\Lambda^0T(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(0)=\mathrm{e}^0=1$

$p=1$： $\mathrm{ch}(\Lambda^1T(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(\sum_{j=1}^{n=2q}L_j)=\sum_{j=1}^{n=2q}\mathrm{ch}L_j=\sum_{j=1}^{n=2q}\mathrm{e}^{x_j}$

$p=2$：
$$\mathrm{ch}(\Lambda^2T(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(\sum_{j=1}^{n=2q}\sum_{k=1}^{n=2q}L_j\otimes L_k)=\sum_{j=1}^{n=2q}\sum_{k=1}^{n=2q}\mathrm{ch}(L_j\otimes L_k)=\sum_{j=1}^{n=2q}\sum_{k=1}^{n=2q}\mathrm{e}^{x_j}\mathrm{e}^{x_k}$$

$\vdots$

$p=n=2q$：
$$\mathrm{ch}(\Lambda^{2q}T(M)\otimes C)=\mathrm{ch}(L_1\otimes L_2\otimes\cdots\otimes L_{2q})=\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\cdots\mathrm{e}^{x_q}\mathrm{e}^{x_{q+1}}\mathrm{e}^{x_{q+2}}\cdots\mathrm{e}^{x_{2q}} \tag{11.3.31}$$

把(11.3.31)式代入(11.3.30)式，就得到(11.3.16)式中的

$$\sum_{p=0}^{p=n=2q}(-1)^p\mathrm{ch}(\Lambda^pT(M)\otimes C)=1-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{x_j}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{x_j}\mathrm{e}^{x_k}-\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&+ e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdots e^{x_q} e^{x_{q+1}} e^{x_{q+2}} \cdots e^{x_{2q}} \\
&= \prod_{i=1}^{n=2q} (1 - e^{x_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{q} (1 - e^{x_i}) \\
&\quad \cdot \prod_{j=1}^{q} (1 - e^{-x_j})(T(M) \otimes C)
\end{aligned}
\tag{11.3.32}
$$

(11.3.16)式中的 $\mathrm{td}(T(M)\otimes C)$ 属于 Todd 类，说明如下。

定义 11.3.2　Todd 类的定义是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{td}(E) &= \prod_{i=1}^{k} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} C_1(E) + \frac{1}{12}(C_1^2 + C_2)(E) + \cdots
\end{aligned}
\tag{11.3.33}
$$

其中 $C_1(E), C_2(E), \cdots, C_k(E)$ 的定义见式(10.2.2)，(10.2.3)和(10.2.4)。

对于 $E \oplus F$ 直和，Todd 类还有如下相乘性质：

$$
\mathrm{td}(E \oplus F) = \mathrm{td}(E) \cdot \mathrm{td}(F) \tag{11.3.34}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{td}(T(M)\otimes C) &= \mathrm{td}(E_q \oplus \bar{E}_q) \\
&= \mathrm{td}(E) \cdot \mathrm{td}(\bar{E}) \\
&= \prod_{i=1}^{q} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \\
&\quad \cdot (-1)^q \prod_{j=1}^{q} \frac{x_j}{1 - e^{x_j}} (T(M)\otimes C)
\end{aligned}
\tag{11.3.35}
$$

在(11.3.16)式积分中，还有 $e(T(M))$，它是实 M($n=2q$ 维)的

Euler 类。

利用(10.4.14)式,得

$$e(T(M))=e\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)=C_q(E)$$
$$=x_1\wedge\cdots\wedge x_q$$
$$=\prod_{i=1}^{q} x_i(T(M)\otimes C) \tag{11.3.36}$$

把(11.3.32),(11.3.35),(11.3.36)式代入(11.3.16)式的右方,得

$$\sum_p \frac{(-1)^p\operatorname{ch}(\Lambda^p T(M)\otimes C)\operatorname{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}$$
$$=\prod_{i=1}^{q}(1-\mathrm{e}^{x_i})\prod_{j=1}^{q}(1-\mathrm{e}^{-x_j})(T(M)\otimes C)$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{q}\frac{x_i}{1-\mathrm{e}^{x_i}}(-1)^q\prod_{j=1}^{q}\frac{x_j}{1-\mathrm{e}^{-x_j}}(T(M)\otimes C)$$
$$\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{q}x_i}(T(M)\otimes C)$$
$$=(-1)^q\prod_{i=1}^{q}x_i(T(M)\otimes C)$$
$$=(-1)^q e(T(M)) \tag{11.3.37}$$

于是自(11.3.15)与(11.3.16)式得

$$\chi(M)=\operatorname{Index}(\Lambda,d)$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\sum_p(-1)^p$$
$$\cdot\int_{\substack{M\\ n=2q}}\frac{\operatorname{ch}(\Lambda^p T(M)\otimes C)\cdot\operatorname{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}$$

把(11.3.37)式代入上式右方,

$$\chi(M)=\operatorname{Index}(\Lambda,\mathrm{d})$$

$$=(-1)^{\frac{2q}{2}(2q+1)}\cdot(-1)^{q}\int\limits_{\substack{M\\ n=2q}} e(T(M))$$

$$=\int\limits_{\substack{M\\ n=2q}} e(T(M)) \tag{11.3.38}$$

(11. 3. 38)式就是 Gauss-Bonnet 定理。

注意　如果 M 的维数是奇数($n\neq 2q$),则 $e(T(M))=0,\chi(M)=0$,因为(11. 3. 31)式和(11. 3. 32)式的前提 $n=2q$ 不成立!

以下我们列举三种各有特色的典型椭圆复形及其指标定理。

例 1　紧致无边流形 M 上的 Dolbeault 复形的指标定理。

例 2　紧致无边流形 M 上的 Hirzebruch 复形的指标定理。

例 3　紧致无边流形 M 上的 Dirac 复形的指标定理。①

---

① 关于这三种常见椭圆复形的指标定理的推导过程可参见 Patrick Shanahan, Lecture notes in Mathematics,[s. n.], 638 或 The Atiyah-Singer Index Theorem, An Introduction. Springer-Verlag 1978.

第 12 章　四维流形的一些重要性质

§ 12.1　S^4 上非平庸瞬子解（$*F=F$）和 Bianchi 恒等式

一般的规范场 2-形式可写成①

$$F^a=\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu \tag{12.1.1}$$

F^a 的对偶（在 4 维流形 S^4 上）则是

$$*F^a=\frac{1}{2}*F^a_{\lambda\rho}\mathrm{d}x^\lambda\wedge\mathrm{d}x^\rho \tag{12.1.2}$$

其中

$$*F^a_{\lambda\rho}=\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{a\mu\nu} \tag{12.1.3}$$

（见（3.4.3）式 Hodge $*$ 算子的定义）

若规范场 F 没有与其它物质场耦合，则这个规范场 F 的作用量就是

$$S=\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^4xF^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}=-\frac{1}{4}\int\mathrm{Tr}(F\wedge *F) \tag{12.1.4}$$

验证如下。根据（12.1.2）和（12.1.3）式，

$$\mathrm{Tr}\,(F\wedge *F)=\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\frac{1}{2}F^{a\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho}\frac{1}{2}\mathrm{d}x^\lambda\wedge\mathrm{d}x^\rho$$

---

① μ,ν 是时空指标，a,b,c 是群指标。

$$=\frac{1}{8}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho}\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\nu}\wedge\mathrm{d}x^{\lambda}\wedge\mathrm{d}x^{\rho}$$

$$=\frac{1}{8}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}x^{4}$$

$$=\frac{1}{8}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\sigma\tau}\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\mathrm{d}x^{4}$$

$$=F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\mathrm{d}^{4}x \tag{12.1.5}$$

在 $\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ 中，$\lambda\rho$ 有两种排列；$\mu\nu=\sigma\tau$ 和 $\mu\nu=\tau\sigma$ 有两种排列；$\mu\nu$ 与 $\lambda\rho$ 交换，又有两种组合，所以有 $2\times2\times2=8$ 倍。(12.1.5)式成立。

取规范势为 $A^{a}_{\mu}(x)$（矢量场，a 是规范群指标），又取场强张量为 $F^{a}_{\mu\nu}(x)$（张量场，a 是规范群指标），则可定义

$$F^{a}_{\mu\nu}=(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{a}_{\mu}+f^{a}_{bc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}) \tag{12.1.6}$$

式中的 f^{a}_{bc} 是规范群的结构常数，它的另一形式是

$$f_{abc}\equiv f^{n}_{ab}g_{nc} \tag{12.1.7}$$

利用线性变换，可把 g_{nc} 对角化如下：

$$g_{nc}=\delta_{nc} \tag{12.1.8}$$

于是自(12.1.7)式得

$$f_{abc}=f^{c}_{ab} \tag{12.1.9}$$

代入(12.1.4)式，作用量 S 可写成

$$S=-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^{4}xF^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^{4}x(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{a}_{\mu}+f_{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu})F^{a\mu\nu} \tag{12.1.10}$$

利用驻波变分原理，当 $A^{i}_{\mu}\rightarrow A^{i}_{\mu}+\delta A^{i}_{\mu}$，$\delta S=0$，就得

$$0=\delta S=-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^{4}x[\partial_{\mu}\delta A^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}\delta A^{a}_{\mu}$$

$$+f_{abc}(\delta A^{b}_{\mu})A^{c}_{\nu}+f_{abc}A^{b}_{\mu}(\delta A^{c}_{\nu})]F^{a\mu\nu} \tag{12.1.11}$$

由于 $F^{i\mu\nu}=-F^{i\nu\mu}$，

$$\delta A^{i}_{\mu}\cdot\partial_{\nu}F^{i\mu\nu}=\delta A^{i}_{\nu}\cdot\partial_{\mu}F^{i\nu\mu}=-\delta A^{i}_{\nu}\cdot\partial_{\mu}F^{i\mu\nu}$$

代入(12.1.11)式,注意到 δA_ν^a,δA_μ^a 等都是常数,所以有$\partial_\mu \delta A_\nu^a F^{a\mu\nu} = \delta A_\nu^a \partial_\mu F^{a\mu\nu}$,等等。于是 S 相对于 A 的变分取极值:

$$0=\delta S = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 x[\delta A_\nu^a \cdot \partial_\mu F^{a\mu\nu} - \delta A_\mu^a \cdot \partial_\nu F^{a\mu\nu} + f_{abc}(\delta A_\mu^b)A_\nu^c F^{a\mu\nu} + f_{acb}A_\nu^c(\delta A_\mu^b)F^{a\mu\nu}]$$

$$= -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 x[2(\delta A_\nu^a)\partial_\mu F^{a\mu\nu} + 2f_{abc}(\delta A_\mu^b)A_\nu^c F^{a\mu\nu}]$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x[\partial_\mu F^{a\mu\nu} + f_{abc}A_\mu^b F^{c\mu\nu}](\delta A_\nu^a) \tag{12.1.12}$$

δA_ν^a 是任意常数,所以得到 F 场的运动方程如下:

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} + g f_{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} = 0 \tag{12.1.13}$$

令 $F^{\mu\nu} = F^{a\mu\nu}T^a$,$A_\mu = A_\mu^b T^b$,$[T^b, T^c] = \mathrm{i} f_{bca} T^a$,就可定义 D_μ 的作用为(利用(12.1.13)式)

$$\mathrm{D}_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \mathrm{i}g[T^b, T^c]A_\mu^b F^{c\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \mathrm{i}g[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \tag{12.1.14}$$

(12.1.14)式又可简写成 Bianchi 恒等式:

$$\mathrm{D}F = \mathrm{d}F - \mathrm{i}g[A, F] = 0 \tag{12.1.14$_1$}$$

从而有

$$\mathrm{D} = \mathrm{d} - \mathrm{i}g[A,\quad] \tag{12.1.15}$$

利用(12.1.15)式,得出

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\mu F^{\lambda\rho} + \mathrm{D}_\lambda F^{\rho\mu} + \mathrm{D}_\rho F^{\mu\lambda} &= \partial_\mu F^{\lambda\rho} - \mathrm{i}[A_\mu, F^{\lambda\rho}] + \partial_\lambda F^{\rho\mu} - \mathrm{i}[A_\lambda, F^{\rho\mu}] + \partial_\rho F^{\mu\lambda} - \mathrm{i}[A_\rho, F^{\mu\lambda}] \\ &= \partial_\mu F^{c\lambda\rho} T^c - \mathrm{i}[A_\mu^a T^a, F^{b\lambda\rho} T^b] + \partial_\lambda F^{b\rho\mu} T^b - \mathrm{i}[A_\lambda^c T^c, F^{a\rho\mu} T^a] + \partial_\rho F^{a\mu\lambda} T^a - \mathrm{i}[A_\rho^b T^b, F^{c\mu\lambda} T^c] \\ &= \partial_\mu F^{c\lambda\rho} T^c + f_{abc} A_\mu^a F^{b\lambda\rho} T^c + \partial_\lambda F^{b\rho\mu} T^b + f_{cab} A_\lambda^c F^{a\rho\mu} T^b + \partial_\rho F^{a\mu\lambda} T^a + f_{bca} A_\rho^b F^{c\mu\lambda} T^a\end{aligned} \tag{12.1.16}$$

把式(12.1.13)和(12.1.16)作比较,立刻得

$$\mathrm{D}_\mu F^{\lambda\rho}+\mathrm{D}_\lambda F^{\rho\mu}+\mathrm{D}_\rho F^{\mu\lambda}=0 \tag{12.1.17}$$

式(12.1.17)称为 Bianchi 恒等式的张量形式。

我们考察 F 场运动方程(12.1.13)式的满足下式的解(根据(3.4.3)式,在 4 维流形中,若 F 是 2-形式,则 $*F$ 也是 2-形式):

$$F=\lambda * F \tag{12.1.18}$$

由于(12.1.14)式的 Bianchi 恒等式成立,

$$\mathrm{D}_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu F^{\mu\nu}-\mathrm{i}g[A_\mu,F^{\mu\nu}]=0$$

则根据(12.1.18)式必定有

$$\mathrm{D}_\mu F^{\mu\nu}=\mathrm{D}_\mu(\lambda * F)^{\mu\nu}=\lambda\mathrm{D}_\mu(*F)^{\mu\nu}=0$$

从而得知

$$\mathrm{D}_\mu(*F)^{\mu\nu}=0 \tag{12.1.19}$$

利用(12.1.18)式再作一次 * 运算,又得

$$F=\lambda * F=\lambda * \lambda * F=\lambda^2 * * F \tag{12.1.20}$$

根据(4.1.24)式,并取时空维数 $n=4$(偶数),而 F 是 2-形式,$r=2$,则又可得

$$* * F=\mathrm{sign}(g)F \quad \begin{matrix}\mathrm{sign}(g)=+1, E^4\text{ 度规}\\ \mathrm{sign}(g)=-1, M^4\text{ 度规}\end{matrix} \tag{12.1.21}$$

(E^4 与 M^4 分别代表 4 维欧氏空间与 4 维闵氏空间)

把(12.1.21)式代入(12.1.20)式,可得

$$F=\begin{cases}+\lambda^2 F & (E^4\text{ 度规})\\ -\lambda^2 F & (M^4\text{ 度规})\end{cases} \tag{12.1.22}$$

于是看到,对于 E^4 度规,要求 $\lambda\pm 1$:

$$*F=\pm F; \tag*{(12.1.23)$_1$}$$

对于 M^4 度规,要求 $\lambda=\pm\mathrm{i}$:

$$*F=\pm\mathrm{i}F \tag*{(12.1.23)$_2$}$$

这里的 F 和 $*F$ 都带有群指标(见(12.1.1),(12.1.2)式中的 F^a 和

$*F^a$,a 是群指标),都是取值于某个 G 群的微分形式。

但要注意对于 M^4 度规,要求满足 $*F=\pm \mathrm{i}F$,则 G 群不能是紧致李群,而必须是非紧致李群,例如 $SL(n,C)$等。

另一方面,对于 E^4 度规,要求满足 $*F=\pm F$,此时对群 G 没有限制,可取 G 为任意紧致李群。

以下讨论**瞬子解时都将限于 E^4 度规的情况**。

取 G 为任何一个紧致李群。在 E^4 度规条件下,可作如下定义。

定义 12.1.1

$$*F^+=F^+ \qquad (F^+\text{ 为自对偶场}),$$

$$*F^-=-F^- \qquad (F^-\text{ 为反自对偶场})$$

在 E^4 度规前提下,根据(12.1.21)式有:

$$**F=F \tag{12.1.24}$$

$**$ 的本征值为 $+1$,$*$ 的本征值为 ± 1。

定义 12.1.2

$$F^\pm=\frac{1}{2}(F\pm *F)$$

所以

$$F=F^+ +F^-,\ *F=F^+ -F^- \tag{12.1.25}$$

由此定义又可得(根据(12.1.24)和(12.1.25)式):

$$\begin{aligned} *F^\pm &=\frac{1}{2}(*F\pm **F)=\frac{1}{2}(*F\pm F) \\ &=\pm\frac{1}{2}(F\pm *F)=\pm F^\pm \end{aligned} \tag{12.1.26}$$

自(12.1.4)式,在 S^4 流形上积分,利用(12.1.25)式,有

$$-S=+\frac{1}{4}\int_{S^4}\mathrm{d}^4xF^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}=\frac{1}{4}\int_{S^4}\mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}F\wedge *F$$

$$=\frac{1}{4}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F^+ +F^-)\wedge(F^+ -F^-)$$

$$=\frac{1}{4}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F^+\wedge F^+ -F^-\wedge F^- -F^+\wedge F^- +F^-\wedge F^+)$$

(F^+,F^- 都是偶形式,所以 $F^+\wedge F^-=F^-\wedge F^+$)

$$=\frac{1}{4}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F^+\wedge *F^+ +F^-\wedge *F^-)$$

$$=\frac{1}{4}(\|F^+\|^2+\|F^-\|^2)>0 \tag{12.1.27}$$

这里,符号 $\|\ \|^2$ 的定义是

$$\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F\wedge *F)=\|F\|^2\geqslant 0 \tag{12.1.28}$$

在 S^4 上,F 和 $*F$ 都是 2-形式。

定义 12.1.3　取 F 为曲率 2-形式,则庞特里亚金示性类可以定义为(利用(12.1.25)式):

$$k=\int_{S^4}P_1(E)=\frac{g^2}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{Tr}F\wedge F$$

$$=\frac{g^2}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F^+ +F^-)\wedge(*F^+ - *F^-)$$

$$=\frac{g^2}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F^+\wedge *F^+ -F^-\wedge *F^- -F^+\wedge *F^- +F^-\wedge *F^+)$$

在取 E^4 度规的前提下,根据定义 12.1.1,得

$$F^+\wedge *F^-=F^+\wedge(-F^-)=-F^-\wedge F^+$$

$$(F^+, F^- \text{是 2-形式}),$$

$$F^- \wedge * F^+ = F^- \wedge F^+ \rightarrow F^+ \wedge * F^- + F^- \wedge * F^+ = 0$$

于是

$$k = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{S^4} (\mathrm{Tr}(F^+ \wedge * F^+) - \mathrm{Tr}(F^- \wedge * F^-))$$

按照(12.1.28)式的定义,上式就可写成

$$k = \frac{g^2}{8\pi^2} (\| F^+ \|^2 - \| F^- \|^2) \tag{12.1.29}$$

k 是一个拓扑不变量。

从(12.1.27)式看到,$(-S)$应有一个下限。这个下限不等于零,否则就得到 $F^+ = F^- = 0$,这是一个无意义的解。为了求出这个下限,我们考察如下不等式(利用(12.1.28)式):

$$\int_{S^4} \mathrm{Tr}(F \pm * F) \wedge * (F \pm * F) = \| F \pm * F \|^2 \geqslant 0 \tag{12.1.30}$$

$$\begin{aligned}
\text{左方} &= \int_{S^4} \mathrm{Tr}(F \wedge * F + * F \wedge F \pm F \wedge F \pm * F \wedge * F) \\
&= \int_{S^4} \mathrm{Tr}[(F^+ + F^-) \wedge (F^+ - F^-) + (F^+ - F^-) \\
&\quad \wedge (F^+ + F^-) \pm (F^+ + F^-) \wedge (F^+ + F^-) \\
&\quad \pm (F^+ - F^-) \wedge (F^+ - F^-)] \\
&= \int_{S^4} \mathrm{Tr}(2F^+ \wedge F^+ - 2F^- \wedge F^- \pm 2F^+ \wedge F^+ \\
&\quad \pm 2F^- \wedge F^-)
\end{aligned} \tag{12.1.31}$$

利用定义 12.1.1,即 $* F^+ = F^+$,$* F^- = -F^-$,则将(12.1.31)式代入(12.1.30)式得

$$\| F \pm * F \|^2 = 2 \int_{S^4} \mathrm{Tr}(F^+ \wedge F^+ - F^- \wedge F^-)$$

$$
\begin{aligned}
&\pm \mathrm{Tr}(F^+ \wedge F^+ + F^- \wedge F^-) \\
=&2\int_{S^4} \mathrm{Tr}(F^+ \wedge *F^+ + F^- \wedge *F^-) \\
&\pm \mathrm{Tr}(F^+ \wedge *F^+ - F^- \wedge *F^-) \\
=&2(\|F^+\|^2 + \|F^-\|^2) \\
&\pm 2(\|F^+\|^2 - \|F^-\|^2) \\
&\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{12.1.32}
$$

自(12.1.27)式有

$$\|F^+\|^2 + \|F^-\|^2 = -4S > 0 \tag{12.1.33}$$

自(12.1.29)式有

$$\|F^+\|^2 - \|F^-\|^2 = 8\pi^2 k/g^2 \tag{12.1.34}$$

(12.1.29)和(12.1.34)式中的 k 是一个实数，可正可负。

回顾(12.1.32)式，取下限 $\|F \pm *F\|^2 = 0$，则(12.1.32)式给出 F^+ 和 F^- 的如下关系：

$$(\|F^+\|^2 + \|F^-\|^2) \pm (\|F^+\|^2 - \|F^-\|^2) = 0 \tag{12.1.35}$$

从(12.1.35)式又可找到 F^+，F^- 的两组解：

(1) $F^- = 0$，　$F = F^+$

所以 $*F = *F^+ = F^+ = F$　　　自对偶解

(2) $F^+ = 0$，　$F = F^-$

所以 $*F = *F^- = -F^- = -F$　　反自对偶解

由此可见，F 的自对偶解

$$F = F^+ = *F \tag{12.1.36$_1$}$$

和 F 的反自对偶解

$$F = F^- = -*F \tag{12.1.36$_2$}$$

都是 S 引出的运动方程(12.1.13)式的解。其中的**自对偶解** $*F = F$ 就是以下要讨论的**瞬子解**。

定理 12.1.1 在纯 Y-M 规范场理论中，只有在空间 4 维，时间仍为 1 维的情况下，方才有静态孤子(static soliton)解存在。

(此定理的证明见 Kerson Huang, Quarks Leptons and Gauge Fields(1982))

以下是规范场的外微分形式及有关规范群和规范变换的例子。

(1)**规范群** g 的变换矩阵是厄米矩阵 $T^a, T^b, \cdots$，并有如下性质(θ^a 是一组很小的数)：

$$[T^a, T^b] = \mathrm{i} f_{abc} T^c \tag{12.1.37}$$

$$\Theta = \theta^a T^a, U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta} \cdots \quad \in \Lambda_g^0(M) \qquad 0\text{-形式}$$

(2)**规范势**的矩阵表示为：

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \tag{12.1.38}$$

$$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu = A_\mu^a T^a \mathrm{d}x^\mu \cdots \quad \in \Lambda_g^1(M) \quad 1\text{-形式}$$

(3)**规范势的局域规范变换**(θ^a 是一组很小的数)：

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \delta(A_\mu^a T^a) = -\partial_\mu \theta^a T^a + g f_{abc} \theta^b A_\mu^c T^a \\ &= -\partial_\mu \Theta - \mathrm{i}g[\theta^b T^b, A_\mu^c T^c] = -\partial_\mu \Theta - \mathrm{i}g[\Theta, A_\mu]\end{aligned} \tag{12.1.39}$$

取 $\delta(A) = \delta(A_\mu \mathrm{d}x^\mu)$，则自(3)得

(4) $$\delta(A) = \delta(A_\mu \mathrm{d}x^\mu) = -\partial_\mu \Theta \, \mathrm{d}x^\mu - \mathrm{i}g[\Theta, A_\mu \mathrm{d}x^\mu] \tag{12.1.40}$$

把 Θ 换成 $-\Theta$，则(12.1.40)式写成：

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \partial_\mu \Theta \, \mathrm{d}x^\mu + \mathrm{i}g[\Theta, A_\mu \mathrm{d}x^\mu] \\ &= \mathrm{d}\Theta + \mathrm{i}g\theta^a A_\mu^b \mathrm{d}x^\mu [T^a, T^b] \\ &= \mathrm{d}\Theta - \mathrm{i}g\theta^a A_\mu^b \mathrm{d}x^\mu [T^b, T^a] \\ &= \mathrm{d}\Theta - \mathrm{i}g[A, \Theta] \qquad (\text{根据(12.1.37)}) \\ &= \mathrm{D}_0 \Theta \quad \cdots \in \Lambda_g^1(M) \qquad 1\text{-形式}\end{aligned}$$

所以 $$\mathrm{D}_0 = \mathrm{d} - \mathrm{i}g[A, \quad] \tag{12.1.41}$$

(5) **规范场的局域规范变换**。规范场

$$F=\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}T^a\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\cdots\qquad\text{2-形式}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial A^a_\mu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A^a_\nu}{\partial x^\nu}\right)T^a+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu T^a\right\}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\frac{\partial A^a_\nu}{\partial x^\mu}T^a\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu-\frac{\mathrm{i}}{2}g[A^b_\mu T^b,A^c_\nu T^c]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\mathrm{d}(A^a_\nu T^a\mathrm{d}x^\nu)-\frac{\mathrm{i}}{2}g[A^b_\mu T^b,A^a_\nu T^a]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{i}}{2}gA_\mu\mathrm{d}x^\mu\wedge A_\nu\mathrm{d}x^\nu$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}gA_\nu\mathrm{d}x^\nu\wedge A_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

$$=\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{i}}{2}gA_\mu\mathrm{d}x^\mu\wedge A_\nu\mathrm{d}x^\nu\times 2$$

$$=\mathrm{d}A-\mathrm{i}gA\wedge A\cdots\qquad\in\Lambda^2_g(M)\qquad\text{2-形式}\tag{12.1.42}$$

根据(12.1.42)式,可写出规范场 F 的规范变换

$$\delta F=\mathrm{d}(\delta A)-\frac{\mathrm{i}}{2}g[\delta A_\mu,A_\nu]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}g[A_\mu,\delta A_\nu]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\mathrm{d}(\delta A)+\frac{\mathrm{i}}{2}g[A_\nu,\delta A_\mu]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}g[A_\nu,\delta A_\mu]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\mathrm{d}(\delta A)-\mathrm{i}g[A_\mu,\delta A_\nu]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

$$=\mathrm{d}(\delta A)-\mathrm{i}g[A,\delta A]$$

$$=\mathrm{D}_1(\delta A)\cdots\qquad\in\Lambda^2_g(M)\qquad\text{2-形式}$$

所以

$$\mathrm{D}_1=\mathrm{d}-\mathrm{i}g[A,\ \ ]\tag{12.1.43}$$

对照(12.1.41)式的 D_0 与(12.1.43)式的 D_1,以及(12.1.15)式

的 D,可以看到它们有相同之处如下：

$$\mathrm{D}_0=\mathrm{D}_1=\mathrm{D}=\mathrm{d}-\mathrm{i}g[A,\quad] \tag{12.1.44}$$

同时也有不同之处：

①D_0 只作用于 0-形式,例如

$$\Theta=\theta^a T^a\in\Lambda_g^0(M),\qquad \mathrm{D}_0\Theta\in\Lambda_g^1(M) \tag{12.1.45}$$

②D_1 只作用于 1-形式,例如

$$A=A_\mu \mathrm{d}x^\mu\in\Lambda_g^1(M),\quad \mathrm{D}_1A\in\Lambda_g^2(M) \tag{12.1.46}$$

③D 的作用可以给出 Bianchi 等式的张量形式(12.1.17)式和 Bianchi 恒等式$(12.1.14)_1$ 式。

§12.2 自对偶联络 A($\in\Lambda_g^1$)的模空间维数

取联络 A(A 也称为规范势),利用 A 可导出规范场 F。如果导出的规范场 F 是自对偶的($F=*F$),则称这个联络 A 为自对偶的规范势,而 $F=*F$ 就是**瞬子解**。瞬子解的自对偶性质是一种拓扑不变的性质。在作 G 群变换后,$A\to g(A)$;以 $g(A)$ 为联络给出的规范场 F_g 也是自对偶的,$F_g=*F_g$。

在所有的提供自对偶规范场 F 的联络 A 的矢量空间中,略去规范群 G 的自由度之后,就可得到自对偶联络 A 的模空间。以下我们讨论这个模空间的维数。

利用 $\mathrm{D}_0=\mathrm{D}_1=\mathrm{D}=\mathrm{d}-\mathrm{i}g[A,\quad]$(见(12.1.44)式)作为微分算子,其中的 A 也就是自对偶解的规范势 A,于是有三步复形如下(M 代表流形)：

$$0\to\Lambda_g^0(M)\xrightarrow{\mathrm{D}_0}\Lambda_g^1(M)\xrightarrow{P_-\mathrm{D}_1}\Lambda_{g-}^2(M)\to 0 \tag{12.2.1}$$

$\Lambda_g^0(M)$中包含所有可能的 Θ,见(12.1.45)式;$\Lambda_g^1(M)$中包含所有的 1-形式 $\mathrm{D}_0\Theta$,又由于 D_0 中取的是自对偶势 A,所以根据自对偶势的定义,$\mathrm{D}_0\Theta$ 也是自对偶的;$\Lambda_{g-}^2(M)$中包含 2-形式的 $P_-\mathrm{D}_1\mathrm{D}_0\Theta$。由于

D_1 和 D_0 中取的都是自对偶势 A(见(12.1.44 式)中的 $\mathrm{d}-\mathrm{i}g[A,\quad]$，所以 $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_0\Theta$ **是自对偶的**；但是又由于 P_- 是**反自对偶投影算符**，所以

$$P_-\mathrm{D}_1\mathrm{D}_0\Theta=0 \tag{12.2.2}$$

可见 $\Lambda_{g-}^2(M)$ 中只有一个 0-元素。于是(12.2.1)的三步复形又可以用图 12.2.1 表示出来。

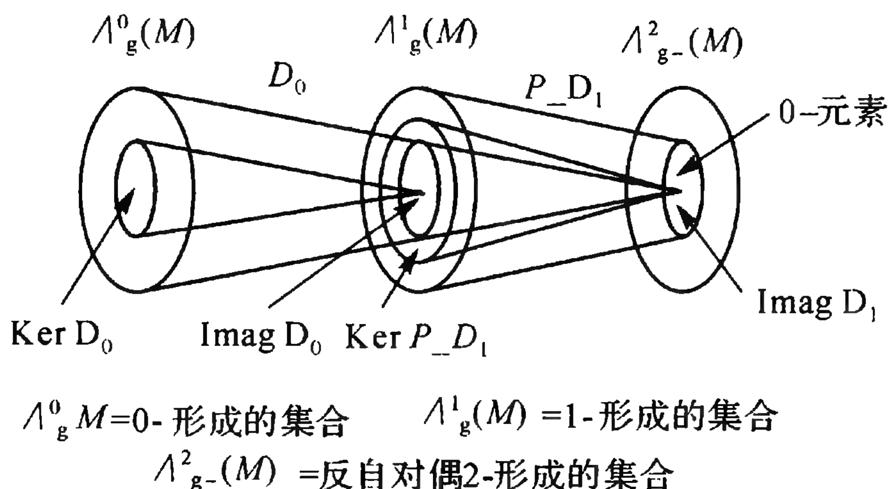


图 12.2.1

杨-米耳斯复形(Y-M **复形**) 如下定义微分算子 $\mathscr{D}_0$ 和 $\mathscr{D}_1$：

$$\mathscr{D}_0=\mathrm{D}_0,\qquad \mathscr{D}_1=P_-\mathrm{D}_1$$

仿照式(11.1.5)，作 Fourier 变换，得到 $\mathscr{D}_0$ 与 $\mathscr{D}_1$ 的 k 表示 $\tilde{\mathrm{D}}_0$ 与 $\tilde{\mathrm{D}}_1$。$k\neq0$ 时，$\tilde{\mathrm{D}}_0$ 与 $\tilde{\mathrm{D}}_1$ 也$\neq0$。所以图 12.2.1 的三步复形是一个**椭圆复形**(**复形定义要求**($P_-\mathrm{D}_1$)·$\mathrm{D}_0=0$，参见定义(11.2.1)式和图 11.2.1，称为 Y-M 椭圆复形，这个椭圆复形的解析指标定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}(\mathrm{D}_\imath,\Lambda_g^i(M))&=\sum_{\imath=0,1,2}\mathrm{Index}(\mathrm{D}_\imath,\Lambda_g^i(M))\\&=h^0-h^1+h^2\end{aligned} \tag{12.2.3}$$

在这里，我们应用了定义 11.2.4 和(11.2.11)式。

把(12.2.3)式与(11.2.11)式作对比，就得

$$h^0=(-1)^0\dim H^0(E,\mathrm{D})=(-1)^0\dim\ \mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_0$$
$$-h^1=(-1)^1\dim H^1(E,\mathrm{D})=(-1)^1\dim\ \mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_1 \qquad (12.2.4)$$
$$h^2=(-1)^2\dim H^2(E,\mathrm{D})=(-1)^2\dim\ \mathrm{Ker}\ \mathrm{D}_2$$

已知 h^k 是上同调群 $H^k_\Lambda(M)$ 的维数，与(12.2.4)式一致：

$$h^k=\dim H^k(M) \qquad (12.2.4)^1$$

于是可以证明：

(i) 对于不可约化的 $SU(2)$ 规范场，$h^0=0$（证明细节略去）。

(ii) 当有自对偶瞬子解时，使用 Bochner-Weitzenbech 技巧又可得到 $h^2=0$（证明细节略去）。所以自(12.2.3)式得

$$\mathrm{Index}(\mathrm{D}_i,\Lambda^i_g(M))=-h^1 \qquad (12.2.5)$$

h^1 是独立瞬子解的自由度。

利用 A-S **指标定理**(11.2.31)式，注意到 D_i 与 D 对应，$\Lambda^i_g(M)$ 与 E 对应，所以(12.2.5)式又可写成（取流形 M 为 S^4）：

$$\mathrm{Index}(\mathrm{D}_i,\Lambda^i_g(M))$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\int_{M=S^4}\frac{\mathrm{ch}\left(\bigoplus_{i=0}^{2}(-1)^i\Lambda^i_g(M)\right)}{\mathrm{e}(T(M))}\mathrm{td}(T(M)\otimes C)$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n+1)}\int_{M=S^4}\frac{\mathrm{ch}(\Lambda^0_g(M)-\Lambda^1_g(M)+\Lambda^2_{g-}(M))}{\mathrm{e}(T(M))}$$
$$\cdot\ \mathrm{td}(T(M)\otimes C) \qquad (12.2.6)$$

(12.2.6)式中的 $\Lambda^0_g(M)$，$\Lambda^1_g(M)$，$\Lambda^2_{g-}(M)$ 与图 12.2.1 是一致的。对于 S^4 上的复向量丛，可以把它复化并利用分裂原理写成：

$$T(M)\otimes C=L_1\oplus\bar{L}_1\oplus L_2\oplus\bar{L}_2 \qquad (12.2.7)$$

于是利用 Todd 类的(11.2.33)式的特殊性质，可以得

$$\mathrm{td}(T(M)\otimes C)=\mathrm{td}(L_1\oplus\bar{L}_1\oplus L_2\oplus\bar{L}_2)$$
$$=\mathrm{td}(L_1)\cdot\mathrm{td}(\bar{L}_1)\cdot\mathrm{td}(L_2)\cdot\mathrm{td}(\bar{L}_2)$$
$$(12.2.8)$$

根据(11.2.32)式，$\bar{x}_j=-x_j$（x_j 是虚数），而且右端相乘的因子只有 4 个，所以自(11.2.32)式可以得

$$\mathrm{td}(T(M)\otimes C)=\left(\frac{x_1}{1-\mathrm{e}^{-x_1}}\right)\left(\frac{-x_1}{1-\mathrm{e}^{x_1}}\right)\left(\frac{x_2}{1-\mathrm{e}^{-x_2}}\right)\left(\frac{-x_2}{1-\mathrm{e}^{x_2}}\right) \tag{12.2.9}$$

仿照(10.4.3)式，把$(e(a))^2$ 写成$(e(T(M))^2$，则有

$$(e(T(M))^2=\begin{vmatrix} 0 & x_a & 0 & 0 \\ -x_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_b \\ 0 & 0 & -x_b & 0 \end{vmatrix}=(x_a x_b)^2$$

所以　　$$e(T(M))=x_a x_b \tag{12.2.10}$$

利用(12.2.9)和(12.2.10)式，取 $x_1=x_a$，$x_2=x_b$，则有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{td}(T(M)\times C)}{e(T(M))}&=\frac{1}{x_a x_b}\cdot\frac{x_a}{1-\mathrm{e}^{-x_a}}\cdot\frac{-x_a}{1-\mathrm{e}^{x_a}}\cdot\frac{x_b}{1-\mathrm{e}^{-x_b}}\cdot\frac{-x_b}{1-\mathrm{e}^{x_b}} \\
&=x_a x_b\frac{1}{x_a-\frac{x_a^2}{2!}+\frac{x_a^3}{3!}-\cdots}\cdot\frac{1}{x_b-\frac{x_b^2}{2!}+\frac{x_b^3}{3!}-\cdots} \\
&\quad\cdot\frac{1}{x_a+\frac{x_a^2}{2!}+\frac{x_a^3}{3!}+\cdots}\cdot\frac{1}{x_b+\frac{x_b^2}{2!}+\frac{x_b^3}{3!}+\cdots} \\
&=\frac{1}{x_a x_b}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x_a^2}{3!}+\frac{x_a^4}{5!}\cdots\right)^2-\left(\frac{x_a}{2!}+\frac{x_a^3}{4!}\cdots\right)^2\cdots} \\
&\quad\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x_b^2}{3!}+\frac{x_b^4}{5!}\cdots\right)^2-\left(\frac{x_b}{2!}+\frac{x_b^3}{4!}\cdots\right)^2\cdots} \\
&=\frac{1}{x_a x_b} \\
&\quad\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2x_a^2}{3!}+\frac{2x_a^4}{5!}+\frac{x_a^4}{(3!)^2}\cdots\right)-\left(\frac{x_a^2}{(2!)^2}+\frac{2x_a^4}{2!\ 4!}+\cdots\right)}
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2x_b^2}{3!}+\frac{2x_b^4}{5!}+\frac{x_b^4}{(3!)^2}\cdots\right)-\left(\frac{x_b^2}{(2!)^2}+\frac{2x_b^4}{2!\ 4!}+\cdots\right)}$$

（保留 x_a, x_b 在 $\ll 1$ 的区间的主要积分贡献；略去 x_a, x_b 在不是 $\ll 1$ 的区间的次要积分贡献）

$$=\frac{1}{x_a x_b}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2x_a^2}{6}-\frac{x_a^2}{4}\cdots\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2x_b^2}{6}-\frac{x_b^2}{4}\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{x_a x_b}\left(1-\frac{x_a^2}{12}\right)\left(1-\frac{x_b^2}{12}\right)\cdots \tag{12.2.11}$$

至此，我们已找到了(12.2.6)式中的 $\frac{\mathrm{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}$ 因子的具体形式，还需要进一步找出 $\mathrm{ch}(\Lambda_g^0(M)-\Lambda_g^1(M)+\Lambda_{g-}^2(M))$ 的内涵：

$$\Lambda_g^0=V_g\otimes\Lambda^0,\Lambda_g^1=V_g\otimes\Lambda^1,\Lambda_{g-}^2=V_g\otimes\Lambda_-^2 \tag{12.2.12}$$

其中 Λ^0，Λ^1 和 Λ_-^2 分别是 S^4 流形上的 0-形式、1-形式和反对偶 2-形式的集合。在这里，瞬子作为 $M=S^4$ 上的一个向量丛，是取值在群空间(G)上的，所以复形 Λ_g^0，Λ_g^1，Λ_{g-}^2 都是与 G 群有关的扭曲的复形。具体形式如下：

(1)Λ^0：S^4 上面 0-形式的集合(0-形式是 0 维的)。$\Lambda_g^0=V_g\otimes\Lambda^0$ 是一个平庸丛，曲率为 0，

$$\mathrm{ch}(\Lambda^0)=1 \tag{12.2.13$_1$}$$

ch 是陈特征标，定义见(10.2.7)式。

(2)Λ^1：S^4 上面 1-形式的集合，$\dim(S^4)=4$。利用复向量丛分裂原理(见(10.2.8)和(10.2.13)式，在 S^4 上的复向量丛 Λ^1 可分解为复线丛之和如下：

$$\Lambda^1=L_a\oplus\bar{L}_a\oplus L_b\oplus\bar{L}_b \tag{12.2.13$_2$}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\Lambda^1)&=\mathrm{ch}(L_a\oplus\bar{L}_a\oplus L_b\oplus\bar{L}_b)\\&=\mathrm{ch}(L_a)\oplus\mathrm{ch}(\bar{L}_a)\oplus\mathrm{ch}(L_b)\oplus\mathrm{ch}(\bar{L}_b)\\&=e^{x_a}+e^{-x_a}+e^{x_b}+e^{-x_b}\end{aligned} \tag{12.2.14}$$

(3)Λ_{-}^{2} :S^4 上面的 * 本征值为-1 的反对偶 2-形式的集合。为了找 ch(Λ_{-}^{2}),我们考察 S^4 上的 Λ^2,Λ_{+}^{2},Λ_{-}^{2}。

S^4 上的 Λ^1 有四个基:

$$\mathrm{d}x_1,\quad \mathrm{d}x_2,\quad \mathrm{d}x_3,\quad \mathrm{d}x_4 \tag{12.2.15}$$

S^4 上的 Λ^2 有六个基:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,\quad \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3,\quad \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4\\&\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\quad \mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4,\quad \mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\end{aligned} \tag{12.2.16}$$

(12.2.16)式的对偶是(按偶奇排列取+,-):

$$\begin{aligned}&*\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\\&*\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3=-\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4\\&*\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\&*\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4\\&*\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4=-\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3\\&*\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{12.2.17}$$

经过线性组合,又可得到 * 的本征值为∓1 的六个 Λ_{-}^{2} 和 Λ_{+}^{2} 如下:

① $*(\mathrm{d}x_1+\mathrm{i}\mathrm{d}x_2)\wedge(\mathrm{d}x_3-\mathrm{i}\mathrm{d}x_4)$

$$\begin{aligned}&=*(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{i}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3-\mathrm{i}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=-\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4-\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{i}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4-\mathrm{i}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\&=-(\mathrm{d}x_1+\mathrm{i}\mathrm{d}x_2)\wedge(\mathrm{d}x_3-\mathrm{i}\mathrm{d}x_4)\end{aligned}$$

所以 $$*=- \tag{12.2.18}$$

② $*(\mathrm{d}x_1-\mathrm{i}\mathrm{d}x_2)\wedge(\mathrm{d}x_3+\mathrm{i}\mathrm{d}x_4)$

$$\begin{aligned}&=*(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4-\mathrm{i}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{i}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=-\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4-\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-\mathrm{i}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{i}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\&=-(\mathrm{d}x_1-\mathrm{i}\mathrm{d}x_2)\wedge(\mathrm{d}x^3+\mathrm{i}\mathrm{d}x^4)\end{aligned}$$

所以 $$*=- \tag{12.2.19}$$

③ $*(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)$

$$=(dx_3 \wedge dx_4 - dx_1 \wedge dx_2)$$

$$=-(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4)$$

所以 $$* = - \tag{12.2.20}$$

以上①,②,③都取 $*=-$,都属于 Λ_-^2 。

④ $*(dx_1+idx_2)\wedge(dx_3+idx_4)$

$$=*(dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4+idx_1\wedge dx_4+idx_2\wedge dx_3)$$

$$=-dx_2\wedge dx_4+dx_1\wedge dx_3+idx_2\wedge dx_3+idx_1\wedge dx_4$$

$$=-(dx_1+idx_2)\wedge(dx_3+idx_4)$$

所以 $$* = + \tag{12.2.21}$$

⑤ $*(dx_1-idx_2)\wedge(dx_3-idx_4)$

$$=*(dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4-idx_1\wedge dx_4-idx_2\wedge dx_3)$$

$$=-dx_2\wedge dx_4+dx_1\wedge dx_3-idx_2\wedge dx_3-idx_1\wedge dx_4$$

$$=(dx_1-idx_2)\wedge(dx_3-idx_4)$$

所以 $$* = + \tag{12.2.22}$$

⑥ $*(dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4)$

$$=(dx_3\wedge dx_4+dx_1\wedge dx_2)$$

$$=(dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4)$$

所以 $$* = + \tag{12.2.23}$$

以上④,⑤,⑥都取 $*=+$,都属于 Λ_+^2 。于是得知 Λ_-^2 有①,②,③三组基,Λ_+^2 有④,⑤,⑥三组基。

现在回到(12.2.6)式,并利用(10.2.8)式的陈特征标性质,就可给出:

$$\mathrm{ch}(\Lambda_g^0(M)-\Lambda_g^1(M)+\Lambda_{g-}^2(M))$$

$$=\mathrm{ch}(\Lambda_g^0(M))-\mathrm{ch}(\Lambda_g^1(M))+\mathrm{ch}(\Lambda_{g-}^2(M))$$

(利用(12.2.12)式)

$$=\mathrm{ch}[V_g\otimes(\Lambda^0(M)\ominus\Lambda^1(M)\oplus\Lambda_{g-}^2(M))]$$

(利用(10.2.8)式)

$=\mathrm{ch}(V_g)\cdot\mathrm{ch}(\Lambda^0-\Lambda^1+\Lambda^2_-)(M)$

（以下省略(M)记号）

$$=\mathrm{ch}(V_g)\cdot(\mathrm{ch}\Lambda^0-\mathrm{ch}\Lambda^1+\mathrm{ch}\Lambda^2_-) \tag{12.2.24}$$

Λ^0 是 0-形式的集合，它等价于一个平庸丛，曲率为 0：

$\mathrm{ch}\Lambda^0=1$　　（见(12.2.13)$_1$ 式）

Λ^1 是 1-形式的集合，$\dim(S^4)=4$。由于分裂原理，S^4 上的 $\mathrm{ch}(\Lambda^1)$可写成：

$$\mathrm{ch}(\Lambda^1)=\mathrm{ch}(L_a\oplus\bar{L}_a\oplus L_b\oplus\bar{L}_b)=\mathrm{e}^{x_a}+\mathrm{e}^{-x_a}+\mathrm{e}^{x_b}+\mathrm{e}^{-x_b}$$

根据(10.2.7)式，x_a 和 x_b 都是虚数。

Λ^2_- 是 * 的本征值为 −1 的 2-形式的集合。根据第 10 章的(10.2.13)，(10.2.14)，(10.2.15)式，复向量丛 E 可以分裂成为复线丛的直和（见§10.2）。

于是，利用(12.2.18)，(12.2.19)式，可以定义：

$\bar{L}_a$ 的基为 $\mathrm{d}x_1+\mathrm{i}\mathrm{d}x_2$，　L_a 的基为 $\mathrm{d}x_1-\mathrm{i}\mathrm{d}x_2$

$\bar{L}_b$ 的基为 $\mathrm{d}x_3+\mathrm{i}\mathrm{d}x_4$，　L_b 的基为 $\mathrm{d}x_3-\mathrm{i}\mathrm{d}x_4$

其中 L_a,L_b 都是复数。与此不同的是，在(12.2.20)式中，$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$ 都是实数，而且 $\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$ 是旋转不变的标量，可取作 1。于是，加在一起，就得

$$\Lambda^2_-=\bar{L}_a\otimes L_b+L_a\otimes\bar{L}_b+1 \tag{12.2.25}$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\Lambda^2_-)&=\mathrm{ch}\bar{L}_a\cdot\mathrm{ch}L_b+\mathrm{ch}L_a\cdot\mathrm{ch}\bar{L}_b+\mathrm{ch}1\\&=\mathrm{e}^{-x_a}\cdot\mathrm{e}^{x_b}+\mathrm{e}^{x_a}\cdot\mathrm{e}^{-x_b}+1\\&=1+\mathrm{e}^{x_a-x_b}+\mathrm{e}^{-x_a+x_b}\end{aligned} \tag{12.2.26}$$

把式(12.2.13)$_1$，(12.2.14)，(12.2.26)合在一起：

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\Lambda^0-\Lambda^1+\Lambda^2_-)&=\mathrm{ch}(\Lambda^0)-\mathrm{ch}(\Lambda^1)+\mathrm{ch}(\Lambda^2_-)\\&=1-(\mathrm{e}^{x_a}+\mathrm{e}^{-x_a}+\mathrm{e}^{x_b}+\mathrm{e}^{-x_b})\\&\quad+(1+\mathrm{e}^{x_a-x_b}+\mathrm{e}^{-x_a+x_b})\end{aligned}$$

$$=2-4+2-\frac{2x_a^2}{2!}-\frac{2x_b^2}{2!}+2\frac{(x_a-x_b)^2}{2!}$$

$$-2\frac{x_a^4}{4!}-2\frac{x_b^4}{4!}+2\frac{(x_a-x_b)^4}{4!}$$

（由于流形 S^4 是 4 维的，所以 S^4 上的外乘最多不超过 4-形式）

$$=-2x_ax_b-\frac{x_a^4+x_b^4}{12}+\frac{(x_a-x_b)^4}{12}$$

$$=-2x_ax_b-\frac{4x_a^3x_b-6x_a^2x_b^2+4x_ax_b^3}{12}$$

$$=x_ax_b\left(-2-\frac{1}{3}x_a^2+\frac{1}{2}x_ax_b-\frac{1}{3}x_b^2\right) \tag{12.2.27}$$

再把(12.2.27)和(12.2.11)式相乘，又可得

$$\mathrm{ch}(\Lambda^0-\Lambda^1+\Lambda^2_-)\cdot\frac{\mathrm{td}(T(M)\otimes C)}{(e(T(M))}=x_ax_b$$

$$\cdot\left(-2-\frac{1}{3}x_a^2+\frac{1}{2}x_ax_b-\frac{1}{3}x_b^2\right)$$

$$\cdot\frac{1}{x_ax_b}\left(1-\frac{x_a^2}{12}\right)\left(1-\frac{x_b^2}{12}\right)$$

$$=x_ax_b\left(-2-\frac{1}{3}x_a^2+\frac{1}{2}x_ax_b-\frac{1}{3}x_b^2\right)\left(1-\frac{x_a^2}{12}-\frac{x_b^2}{12}\right)\frac{1}{x_ax_b}$$

$$=x_ax_b\left(-2+\frac{1}{6}x_a^2+\frac{1}{6}x_b^2-\frac{1}{3}x_a^2+\frac{1}{2}x_ax_b-\frac{1}{3}x_b^2\right)\frac{1}{x_ax_b}$$

$$=\left(-2-\frac{1}{6}(x_a^2+x_b^2)+\frac{1}{2}x_ax_b\right) \tag{12.2.28}$$

流形 S^4 是 4 维的，所以上式中 $\frac{1}{x_ax_b}$ 的左边不会出现高于 4-形式的项。

回顾(12.2.6)和(12.2.24)式，并利用(12.2.28)式，可得

$$\int_{M=S^4}\mathrm{ch}(\Lambda_g^0(M)-\Lambda_g^1(M)+\Lambda_{g-}^2(M))\frac{\mathrm{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}$$

$$= \int_{M=S^4} \mathrm{ch}(V_g)\cdot(\mathrm{ch}\Lambda^0-\mathrm{ch}\Lambda^1+\mathrm{ch}\Lambda^2_-)\frac{\mathrm{td}(T(M)\otimes C)}{e(T(M))}$$

$$= \int_{M=S^4} \mathrm{ch}(V_g)\cdot\left(-2-\frac{1}{6}(x_a^2+x_b^2)+\frac{1}{2}x_a x_b\right) \qquad (12.2.29)$$

其中 V_g 是 $SU(N)$群的伴随表示，有 N^2-1 个生成元，构成 N^2-1 维的矢量空间。我们取

$$\mathrm{ch}(V_g)=(N^2-1)+2Nk\eta \qquad (12.2.30)$$

η 满足 $\int_{M=S^4}\eta(M)=1$，则有

$$式(12.2.29)=\int_{M=S^4}((N^2-1)+2Nk\eta)\cdot\left(-2-\frac{1}{6}(x_a^2+x_b^2)+\frac{1}{2}x_a x_b\right)$$

$$=\int_{M=S^4}\left[(N^2-1)\left(-\frac{1}{6}(x_a^2+x_b^2)+\frac{1}{2}x_a x_b\right)-4NK\eta\right] \qquad (12.2.31)$$

（$-2(N^2-1)$是常数，在 $\int_{M=S^4}$ 积分中无贡献）

取 $\tau(M)$为符号差

$$\tau(M)=\int_{M=S^4}\frac{1}{3}(x_a^2+x_b^2) \qquad (12.2.32)$$

又取 $\chi(M)$为欧拉数

$$\chi(M)=\int_{M=S^4}x_a x_b \qquad (12.2.33)$$

把 $\tau(M)$和 $\chi(M)$代入(12.2.31)式就得

$$式(12.2.29)=-\frac{1}{2}\tau(M)(N^2-1)+\frac{1}{2}\chi(M)(N^2-1)-4Nk \qquad (12.2.34)$$

当 $M=S^4$ 时：$\tau(S^4)=0,\chi(S^4)=2$，所以(12.2.34)式又可定义为

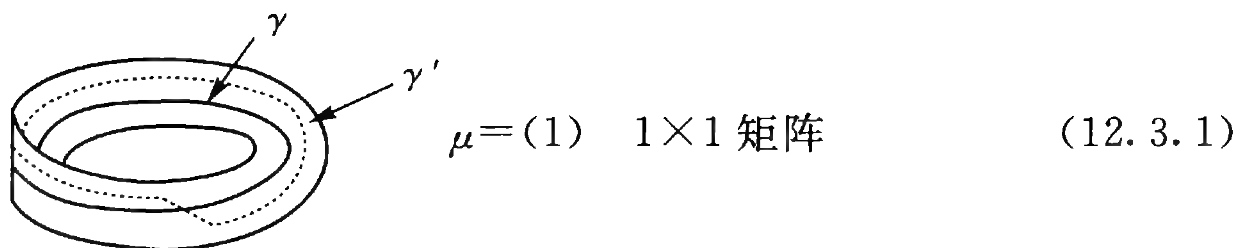
$$\text{式}(12.2.29)=(N^2-1)-4Nk=-h^1 \tag{12.2.35}$$

$$\text{例如}\quad (M^4=S^4)\quad \left.\begin{array}{l} \mathrm{SU}(N):h^1=4Nk-(N^2-1) \\ SU(2):h^1=8k-3 \\ SU(3):h^1=12k-8 \\ \vdots \end{array}\right\} \tag{12.2.36}$$

§12.3 单连通4-流形的拓扑分类

我们考察紧致连通无边曲面 Σ，在它上面取两条闭曲线 γ_1 和 γ_2。只需作一次简单形变，就可以使 γ_2 穿过 γ_1（不是相切，也不是无限次穿过来又穿过去）。把相交的次数 mod 2，就得到一个数，这个数只依赖于 γ_1 与 γ_2 的同伦类。

最简单的不可定向的 Σ 是 $RP(2)(=P^2(R))$，它上面有闭曲线 γ，γ 的近邻区域形成 Möbius 带。再取 $RP(2)$ 上的另一闭曲线 γ'，它是 γ 在这个 Möbius 带以内的一个形变，则从下图可以看到，γ 和 γ' 相交次数 mod 2 后得 1。

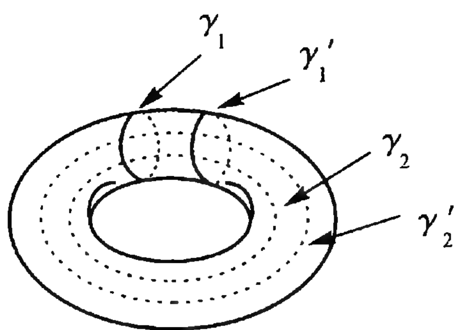


$$\mu=(1)\quad 1\times1\ \text{矩阵} \tag{12.3.1}$$

最简单的可定向的 Σ 是 $S^1\times S^1$（环面）：在 $S^1\times S^1$ 上，γ_1 与 γ'_1 属于同一个同伦类，γ_2 与 γ'_2 也属于同一个同伦类。γ_1,γ'_1 的相交数和 γ_2,γ'_2 的相交数 mod 2 后都是零，见下图。

γ_1,γ'_2 的相交数和 γ_2,γ'_1 的相交数 mod 2 后都是 1，所以得

$$\mu=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad 2\times2\ \text{矩阵} \tag{12.3.2}$$



这里 μ 矩阵就称为相交型。它的不同行和列对应于不同的同伦类，例如，γ_1，γ'_1 属于同一个同伦类，γ_2，γ'_2 属于另一个同伦类，等等。

类似于(12.3.1)和(12.3.2)式的 μ 矩阵就称为**相交型**，μ 中的不同的行列对应于不同的同伦类。例如，γ_1，γ'_1 属于同一个同伦类，γ_2，γ'_2 属于同一个同伦类，等等。

由于 S^2(球面)上的闭曲线总可以缩成一点，所以最小的可定向的 Σ 应是 $S^1\times S^1$，而不是 S^2(因为 S^2 总有南北极的不定向)。

为了推广到更一般的 Σ，我们要利用**连通和**。

连通和(connected sum)。 $\Sigma=A\#B$ 是一个连通和，它是以如下方式把 A 与 B 联接而成的：

$$\Sigma=(A-\sigma_1)\bigcup_h(B-\sigma_2)$$

$$h:\partial\sigma_1\xrightarrow{\text{反定向}}\partial\sigma_2 \text{ 微分同胚} \tag{12.3.3}$$

(σ_1，σ_2 分别是在 A，B 上挖去的微小的一块圆盘)

式中 $\partial\sigma_1$，$\partial\sigma_2$ 分别是 σ_1，σ_2 的边缘；h 的含义是把 $\partial\sigma_1$ 和 $\partial\sigma_2$ 按相反的定向联接起来。

于是，在排除同伦平庸的 S^2 之后，Σ 可以划分为两大类：一类是不可定向的，例如在 $w_1(T(M))\neq0$ 的情况下，见(10.5.6)式；另一类是可定向的，例如在 $w_1(T(M))=0$ 的情况下，见(10.5.7)式。

把前面的讨论加以推广，就知道它们的相交性质可用如下的 μ 矩阵(简称相交型)来表示(其中不同的行列代表不同的同伦类)：

(1) 不可定向的 Σ

$(w_1 \neq 0)$
类型Ⅰ：
$$\mu=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

奇形式：对角线上是奇数，

$$\Sigma=\mathrm{RP}(2)\#\cdots\#\mathrm{RP}(2) \tag{12.3.4}$$

(2) 可定向的 Σ

$(w_1=0)$
类型Ⅱ：
$$\mu=\begin{pmatrix} \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

偶形式：对角线上是偶数(参看(12.3.2)式)，

$$\Sigma=(S^1\times S^1)\#\cdots\#(S^1\times S^1) \tag{12.3.5}$$

定理 12.3.1 两个紧致连通曲面相互微分同胚的充要条件是两者的相交型等价(证明略去)。

由此可见，μ 可以给出非平庸 Σ 的微分同胚性质的分类。

现在，把上述讨论应用于 4-维流形。

4-维紧致无边的①单连通流形 M^4 的特点首先在于它的单连通性，导致基本群 $\Pi_1(M^4)=0$，由此又导致**同调群** $H_1(M^4)=0$。进一步根据 Poincaré 对偶定理和 $H_i(M^4)$ 与 $H^i(M^4)$ 的对偶性质(见

① 单连通的 M^4 流形是可定向的。

(7.5.1)式及有关推论),应该存在如下关系

$$H_1(M^4)=H_3(M^4)=0 \tag{12.3.6}$$

$$H_0(M^4,G)=H_4(M^4,G)=G \tag{12.3.7}$$

显然(12.3.6)和(12.3.7)式对于 M^4 流形分类并不能提供信息,所以在 M^4 上提供信息的同调群必定只能是 $H_2(M^4)$。

设有 k 维流形 F^k 和 q 维流形 F^q 及 $F^k,F^q\subset M^{n=k+q}$。若闭子流形 F^k 与 G^q 横截相交,则在上述维数限制下,必定相交于有限个点。因此,在 M^4 中两个横截相交的2维闭曲面相交于有限个点。

类似于2维 Σ 的情况,在4维的 M^4 上也可以定义两维面 F 与两维面 G 的相交数(intersection number)。以下举两个 M^4 的例子,并注意到单连通的 M^4 流形是可定向的:

(1) S^4:$H_2(S^4,z)=0$,与§6.2例1的情况相同,所有环路的相交数为零,所以 S^4 是一个单连通流形。

(2) $S^2\times S^2$:$H_2(S^2\times S^2,z)$的标准生成元是嵌入的 $S^2\times\{点\}$和$\{点\}\times S^2$。两者的自身相交数为零,两者的相互相交数为1。

M^4 上的 $H_2(S^2\times S^2,z)$与 M^2 上的 $H_1(S^1\times S^1,z)$有类似之处。例如 $H_1(S^1\times S^1,z)$的标准生成元是嵌入的 $S^1\times\{点\}$和$\{点\}\times S^1$。两者的自身相交数为零,两者的相互相交数为1。见图12.3.1,$a=S^1\times\{点\}$,$b=\{点\}\times S^1$:

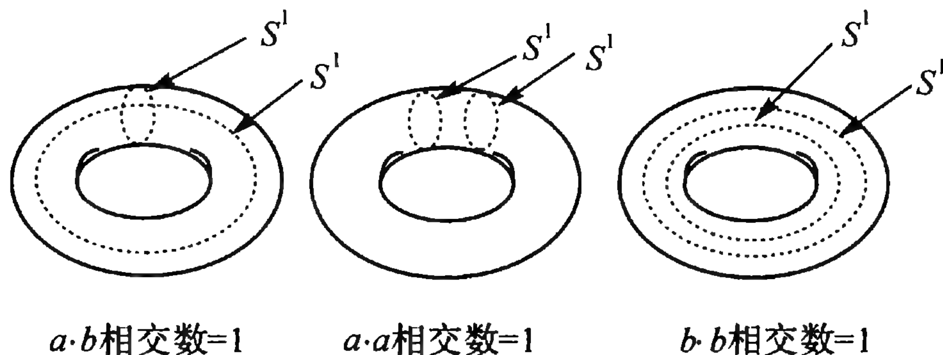


图 12.3.1

仿照(12.3.3)式,4-流形的**连通和** $M^4=P\#Q$ 可定义如下:

$$\left.\begin{aligned} &M^4=(P-\mathrm{InD}_1^4)\bigcup_h(Q-\mathrm{InD}_2^4) \\ &h:\partial\mathrm{InD}_1^4\xrightarrow{\text{反定向}}\partial\mathrm{InD}_2^4\quad\text{微分同胚} \end{aligned}\right\}\tag{12.3.8}$$

如果 P,Q 都是单连通的，则连通和 $P\# Q$ 也是单连通的(其中 InD_1^4 和 InD_2^4 分别是在 P,Q 上挖去的微小的一块；而$\partial\mathrm{InD}_1^4$ 和$\partial\mathrm{InD}_2^4$ 分别是 InD_1^4 和 InD_2^4 的边缘；h 的含意则是把$\partial\mathrm{InD}_1^4$ 和$\partial\mathrm{InD}_2^4$ 按相反的定向联接起来)。

排除同伦平庸的 S^4，M^4 可以按如下的相交型(μ 矩阵)来分类。我们注意到，μ 矩阵限于**非正定**的矩阵，μ 的行列式并不都大于零，它们的分类如下。

Ⅰ类相交型：

$$\mu\cong\langle 1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle 1\rangle\oplus\langle -1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle -1\rangle$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}\tag{12.3.9}$$

奇形式(对角取奇数)

$$M^4=CP^2\#\cdots\# CP^2\#\overline{CP}^2\#\cdots\#\overline{CP}^2\tag{12.3.10}$$

由于要求非正定，必须既有 CP^2 又有$\overline{CP}^2$，所以 μ 中必须既有$\langle 1\rangle$又有$\langle -1\rangle$，见(12.3.9)式。

Ⅱ类相交型：

$$\mu\cong H\oplus\cdots\oplus H\oplus E_8\oplus\cdots\oplus E_8$$

$$=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & & \\ & & & E_8 & \\ & 0 & & & \\ & & & & E_8 \end{pmatrix}_1 \qquad H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(12.3.11)

偶形式(对角取偶数)

$$M^4 \cong (S^2\times S^2)\#\cdots\#(S^2\times S^2)\#E_8\#\cdots\#E_8 \qquad (12.3.12)$$

由于要求非正定,必须至少有一个$(S^2\times S^2)$,也即μ中至少有一个$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$(见(12.3.2)式的 2×2 矩阵相交数等于 1 的例子):

以上(12.3.10)式的 CP^2 和$\overline{CP}^2$,以及(12.3.12)式中 $H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=S^2\times S^2$(见(12.3.2)式和图 12.3.1 的 a,b 相交数$=1$ 的例子)都是已有定义的。(12.3.11)式中的 E_8 则定义为:

$$E_8\equiv\begin{bmatrix}2&1&0&0&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&0\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&1&1&0\\0&0&0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&1&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&1&2\end{bmatrix} \qquad (12.3.13)$$

注意　E_8 式中的非零非对角矩阵元恰好与 Cartan 分类的 E_8

的下列 Dynkin 图一致：

E_8:

(12.3.14)

在(12.3.14)式中，使 E_8 中的行与行交换，列与列交换，可得

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(-1)^3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.3.15}
$$

注意 (12.3.15)式中 E_8 矩阵的第一、第三和第五种相互等价的形式都是对角线对称的。

§12.4 Donaldson 定理

设 M^4 是一个紧致单连通定向光滑的 4-流形，而且它的相交形式 μ_M 是正定的，则 μ_M 必定等价于对角形式，即

$$
\mu_M \cong \langle 1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \tag{12.4.1}
$$

这就是 Donaldson 定理，在证明这个定理之前，我们先考察一下这个 M^4 4 维流形上存在的 $SU(2)$ 群的 $k=1$ 的瞬子(Y-M 自对偶解)。此瞬子解的模空间为 5-维流形 $\mathscr{M}$(见(12.2.36)式 $SU(2)$：$k=1$ 时，模空间的维数$=8-3=5$)，而且这个瞬子还有如下性质：

(1) $\mathscr{M}$ 上有 n 个奇点$(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathscr{M}$。而且 $\mathscr{M}-(p_1, p_2, \cdots, p_n)$是光滑(可微分)的 5-维流形。

(2) 每一个奇点 p_i 的邻近区域的形状是一个 CP^2 锥，锥的顶点就是奇点 p_i，锥的底边(4-维)是一个 $CP(2)$。

(3) $\mathscr{M}$ 是定向的，见图 12.4.1 的箭头。

(4) $\mathscr{M}-(p_1,p_2,\cdots,p_n)\neq\varnothing$，即 5-维流形 $\mathscr{M}$ 是存在的，而且包含一个领口 $(0,\lambda]\times M^4\subset\mathscr{M}$，这个领口下开上闭(见图 12.4.1)。

(5) $\bar{\mathscr{M}}=\mathscr{M}\cup M^4$ 是紧的。由于 $\bar{\mathscr{M}}$ 的下端装上了 M^4，所以 $\bar{\mathscr{M}}$ 中包含的领口是 $[0,\lambda]\times M^4\subset\bar{\mathscr{M}}$。

图 12.4.1

图 12.4.1 中的粗线条表示 $\bar{\mathscr{M}}$ 是紧的；在 $\mathscr{M}$ 旁边的箭头表示定向。

在 $\bar{\mathscr{M}}$ 上截去所有奇点 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 邻近的锥面 C_{p_i}，就又得到图 12.4.2。

图 12.4.2

图 12.4.2 中的 $\bar{\mathscr{M}}-\bigcup_i C_{p_i}$ 是一个定向的 5-维流形；M^4 和 $\underbrace{\pm CP(2)\pm CP(2)\cdots\pm CP(2)}_{(n\text{个}\pm CP(2))}$ 是这个 5-维流形的边。此处 $CP(2)$ 的定向并不一定都相同，所以 $CP(2)$ 前有 $\pm$ 号。

1. 协边关系

例 1　图 12.4.3 中的箭头代表 $\mathscr{M}^5$ 的定向。于是看到：

(1) M_1^4 的定向与 $\mathscr{M}^5$ 的定向相同，对于 M_1^4 应取＋号。

(2) M_2^4 的定向与 $\mathscr{M}^5$ 的定向相反，对于 M_2^4 应取－号。

合起来就得到 $\mathscr{M}^5$ 的边 $\partial\mathscr{M}^5$：

$$\partial\mathscr{M}^5 = M_1^4 \cup (-M_2^4) \tag{12.4.2}$$

这就是 M_1^4 与 $-M_2^4$ 的协边关系，$\partial\mathscr{M}^5$ 代表 $\mathscr{M}^5$ 的边缘。

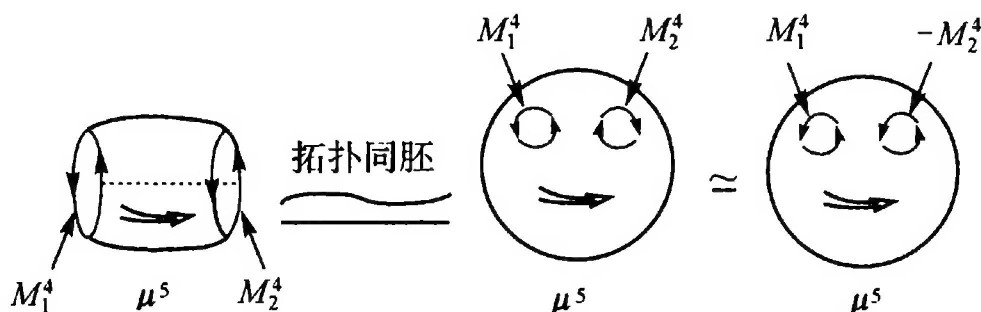


图 12.4.3

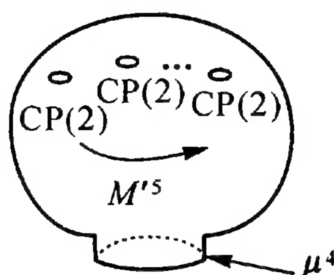


图 12.4.4

例 2　如图 12.4.4 利用图 12.4.2。由于 $CP(2)$ 的定向可正可负，所以应该得

$$\partial(\mathscr{M}^5 - \bigcup_i C_{p_i}) = M^4 \pm CP(2) \pm \cdots \pm CP(2) \tag{12.4.3}$$

这就是 M^4 与 $\pm CP(2) \pm \cdots \pm CP(2)$ 的协边关系。$CP(2)$ 的定向可正可负，所以写 $\pm CP(2)$（有限个奇点，有限个 $\pm CP(2)$）。

2. 协边定理

有上述协边关系的各个边的符号差（signature）之和为 0。可以

利用前面两个例子的协边关系来说明这个性质。把 Q 的符号差写成 $\sigma(Q)$，则有（Q **代表边缘**）：

$$\sigma(Q_{\mathscr{M}^5})=\sigma(Q_{M_1^4})-\sigma(Q_{M_2^4})=0 \tag{12.4.4}$$

其中

$$-\sigma(Q_{M_2^4})=\sigma(Q_{-M_2^4}) \tag{12.4.5}$$

在图 12.4.4 中，$\mathscr{M}^5$ 的边缘是 M^4 和 $\pm CP(2)\pm\cdots\pm CP(2)$，依次削去图 12.4.1 的尖角 $\bigcup_i C_{p_i}=C_{p_1}+C_{p_2}+\cdots$，就得

$$\partial(\mathscr{M}^5-\bigcup_i C_{p_i})=M^4\pm CP(2)\pm\cdots\pm CP(2) \tag{12.4.6}$$

其中 $CP(2)$ 的定向并不一定都相同，所以写成 $\pm CP(2)$。

注意　这里只出现 $CP(2)\#\cdots\# CP(2)$，但并不出现 $\overline{CP}(2)\#\cdots\#\overline{CP}(2)$，所以根据(12.3.9)和(12.3.10)式，得

$$\mu_M\cong\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{pmatrix}=\langle 1\rangle\oplus\langle 1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle 1\rangle \tag{12.4.7}$$

与(12.4.1)式一致，说明 Donaldson 定理成立。

§12.5　Taubes 定理

Tanbes **定理**　设 M^4 是一个光滑的单连通 4-维流形，它的光滑的周期性的一端拓扑同胚于 $S^3\times R$。若 $H_2(M^4,Z)$ 具有正定幺模相交形式，则这个形式中的 z 可以对角化。①

① Tanbes 定理的证明见 SELF-DUAL YANG-MILLS CONNECTIONS ON NON-SELF-DUAL 4-MANIFOLDS, DIFFERENTAL GEOMETRY，17(1982).

以上的 z 是整数，所以流形 z 不属于光滑流形的范畴。对于所有的 $0<r<s<1$，R_r^4 和 R_s^4 并非微分同胚。这些微分不同胚的 R_r^4，R_s^4，…一般称为 TaubesR^4。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理中的微分几何与拓扑学 / 汪容著. —杭州：浙江大学出版社，2010.12

ISBN 978-7-308-07818-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①微分几何②拓扑 Ⅳ.①018

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 139416 号

数学物理中的微分几何与拓扑学

汪　容　著

责任编辑　徐素君

出版发行　浙江大学出版社

（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开　　本　880mm×1230mm　1/32

印　　张　9

字　　数　242 千

版 印 次　2010 年 12 月第 1 版　2010 年 12 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-07818-4

定　　价　25.00 元
